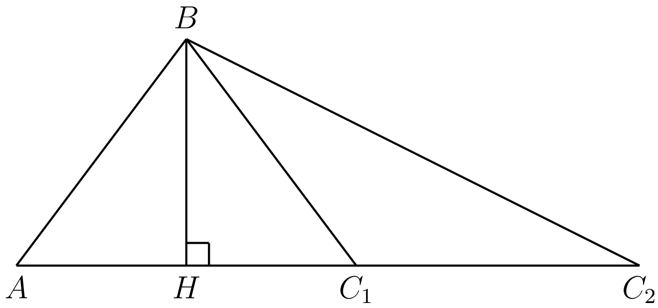
IV ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ
для учителей математики общеобразовательных организаций
16 февраля 2020 года

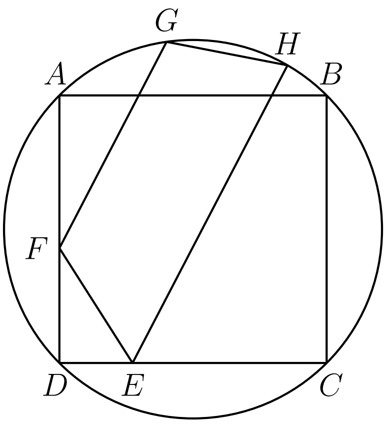
Решения задач

Задача 1. В планиметрии известны признаки равенства треугольников по двум сторонам и бо́льшему углу, по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне. Верно ли, что два треугольника равны, если у них равны две стороны и высота, проведенная к третьей стороне?



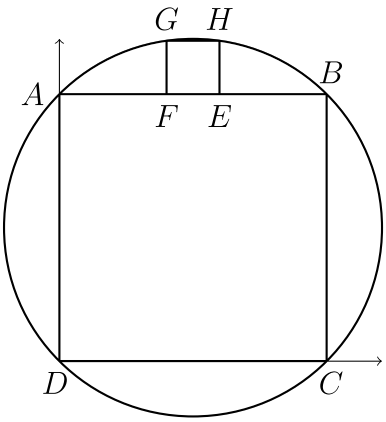
Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle ABC_1$, его высоту AH и точку C_2, не лежащую на луче C_1B. Очевидно, треугольники ABC_1 и ABC_2 не равны. Заметим, что в них равны две стороны и высота, проведенная к третьей стороне: $AC_1 = AC_2$, AB — общая сторона, AH — общая высота.
Ответ: Нет, не верно.

Задача 2. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точки E и F расположены на сторонах квадрата, а точки G и H — на меньшей дуге AB окружности так, что $EFGH$ — квадрат. Найдите отношение площадей этих квадратов.



Решение: Докажем, что точки E и F не могут лежать на разных сторонах квадрата.
Очевидно, что если $F \in DC$, а $E \in AB$, то $GF > EH$.
Пусть теперь $F \in AD, E \in DC$. Очевидно, что в этом случае $FG > EH$. Это можно обосновать, например, продлив отрезки GH и EH до пересечения с AD в точках K и M соответственно. В этом случае получим два неравных подобных треугольника, откуда видим, что $GF < EH$.
Итак, получаем, что $E, F \in AB$.
Введем ПДСК с центорм в точке D и осями $Ox = DC, Oy = DA$, примем сторону квадрата $ABCD$ за 1, пусть $EF = a$.
Тогда получаем уравнение описанной окружности $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

Точка G имеет координаты $G\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{2}; 1 + a\right)$.



Подставим эти координаты в уравнение окружности:

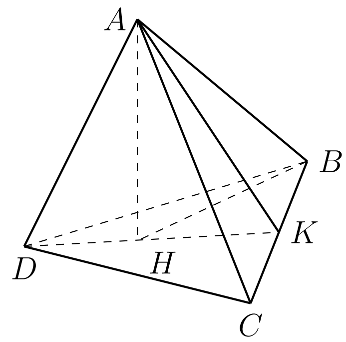
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} + a + a^2 = \frac{1}{2}; \Leftrightarrow 5a^2 + 4a - 1 = 0; \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

Тогда площади квадратов относятся как $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \dfrac{1}{\frac{1}{25}} = 25$.

Ответ: 25.

Задача 3. Верно ли, что из четырех высот произвольного тетраэдра можно выбрать три, из которых можно составить треугольник?

Решение: Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ такой, что $DA \perp ABC, AB \perp AC$. Пусть также $AB = 1, AC = 2, AD = 3$. В таком случае ребра AB, AC, AD являются высотами этого тетраэдра. Очевидно, что из них составить треугольник нельзя.
Теперь нужно провести рассуждения относительно длины четвертой высоты пирамиды. Для начала в треугольнике ABC проведем высоту AK. Получим, что $AK \perp BC, AD \perp ABC \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow ADK \perp BC$. Значит, высота AH треугольника $\triangle DAK$ является и высотой пирамиды. Оценим длину этой высоты.
Это можно сделать несколькими способами:

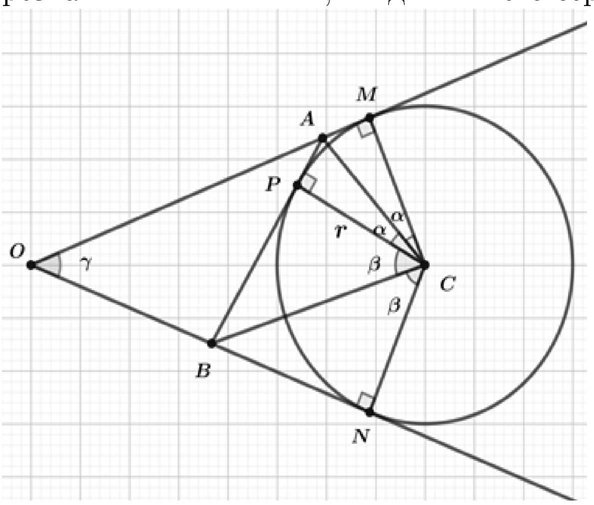


I способ.
Из треугольника $\triangle ABC$ находим $AK = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, тогда из треугольника $\triangle AKD : DK = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$. Тогда $AH = \dfrac{AD \cdot AK}{DK} = \dfrac{3 \cdot 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot 7} = \dfrac{6}{7} < 1$.
II способ.
В прямоугольном треугольнике ABH отрезок $AB = 1$ — гипотенуза, AH — катет. Значит, $AH < 1$.
III способ. Для нахождения высоты пирамиды применим метод объемов. Очевидно, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 1$. При этом, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{DBC}$.
По теореме Пифагора $BC = \sqrt{5}, DB = \sqrt{10}, DC = \sqrt{13}$. Выразив полупериметр через полусумму всех сторон данного треугольника, можно получить эквивалентную формулу Герона:

$$S_{DBC} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4 \cdot 5 \cdot 10 - (5 + 10 - 13)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{196} = \frac{7}{2}.$$

Тогда искомая высота $AH = \dfrac{3V_{ABCD}}{S_{DBC}} = \dfrac{3 \cdot 1 \cdot 2}{7} = \dfrac{6}{7} < 1$.
Очевидно, что среди отрезков $AB = 1, AC = 2, AD = 3, AH < 1$ невозможно выбрать три, из которых можно составить треугольник.
Ответ: Нет, не верно.

Задача 4. В угол с вершиной O вписана окружность, касающаяся его сторон в точках M и N. На дуге MN, ближайшей к точке O, выбрана произвольная точка P. В точке P к окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках A и B. Докажите, что длина отрезка AB наименьшая, когда P — его середина.



1)$\triangle AMC = \triangle APC$ (по гипотенузе и катету), $\angle ACM = \angle ACP = \alpha$, $\triangle BPC = \triangle BNC$ (по гипотенузе и катету), $\angle PCB = \angle BCN = \beta$.
$\angle MCN = 2\alpha + 2\beta = 180° - \gamma$, $\alpha + \beta = 90° - \dfrac{\gamma}{2}$;
2) $AP = PC \cdot \operatorname{tg} \alpha = r \cdot \operatorname{tg} \alpha$,
$BP = PC \cdot \operatorname{tg} \beta = r \cdot \operatorname{tg} \beta$,
$AB = AP + BP = r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \dfrac{r \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \dfrac{r \cdot \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)} = \dfrac{2r \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos(\alpha - \beta) + \cos\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)} = \dfrac{2r \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos(\alpha - \beta) + \sin \frac{\gamma}{2}}$.
$2r, \cos \frac{\gamma}{2}, \sin \frac{\gamma}{2}$ не зависят от положения точки P. Значит, AB — наименьшее,когда $\cos(\alpha - \beta)$ принимает наибольшее значение. Иными словами, $\cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
3)В этом случае CP — высота и биссектриса $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ — равнобедренный(по признаку), значит CP — медиана, $AP = BP$. ч.т.д.