РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
V ОЛИМПИАДЫ ПО ГЕОМЕТРИИ
для учителей математики общеобразовательных организаций

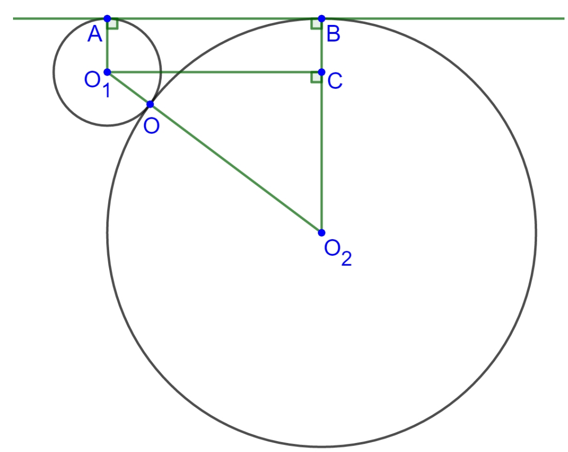
21 марта 2021 года

Задачи о касательных и окружностях

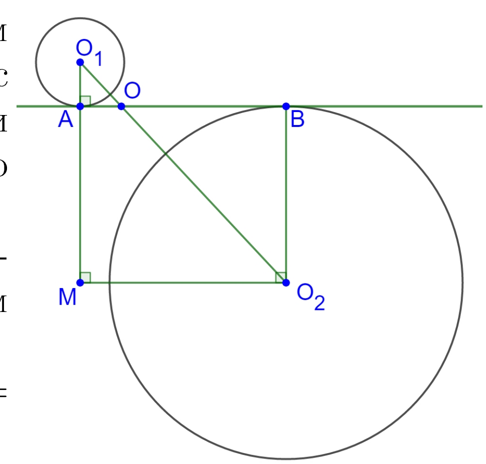
Максимальный балл по каждой задаче — 7.

№ 1. а) Две окружности радиусов 6 и 24 касаются внешним образом. Прямая l касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Найдите AB.
б) Расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей радиусов 6 и 24 равно 36. Прямая l касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B и пересекает отрезок O_1O_2. Найдите AB.
Решение.

а) Введем обозначения: центр меньшей окружности назовём O_1, центр большей — O_2, точку касания окружностей O. Проведем радиусы $O_1A = r$ и $O_2B = R$ в точки касания. Отметим, что $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$. Из этого следует, что $O_1A \parallel O_2B$ и O_1ABO_2 — прямоугольная трапеция.
Опустим высоту O_1C на O_2B. В силу параллельности получим, что $O_1C = AB$.
В прямоугольном треугольнике $\triangle O_1CO_2$: $O_1O_2 = r + R, O_2C = R - r$.
Тогда $O_1C = \sqrt{{O_1O_2}^2 - O_2C^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{6 \cdot 24} = 24$.
Итак, $AB = 24$.



б) Введем обозначения: центр меньшей окружности назовём O_1, центр большей — O_2, точку пересечения прямой AB с отрезком O_1O_2 — O. Проведем радиусы O_1A и O_2B в точки касания. Отметим, что $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$. Из этого следует, что $O_1A \parallel O_2B$.
Через O_2 проведём прямую параллельно AB. Точку пересечения построенной прямой с продолжением O_1A обозначим M.
В силу параллельности получим, что $O_1M \perp O_2M$, $AM = BO_2$, $AB = MO_2$.

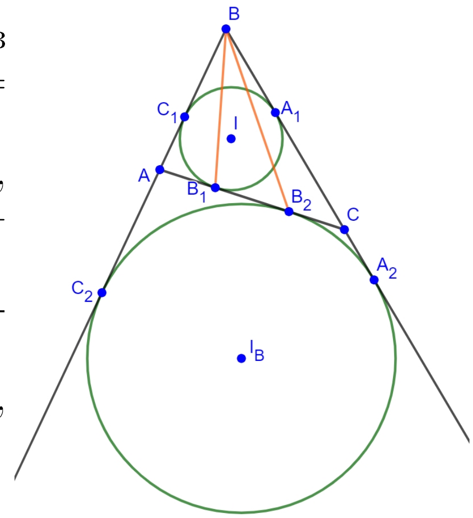


В прямоугольном треугольнике $\triangle O_1MO_2$: $O_1O_2 = 36, O_1M = 30$.
Тогда $O_2M = \sqrt{{O_1O_2}^2 - O_1M^2} = \sqrt{36^2 - 30^2} = \sqrt{(36-30)\cdot(36+30)} = \sqrt{6 \cdot 66} =$

$6\sqrt{11}$. Итак, $AB = 6\sqrt{11}$.
Ответ. а) 24; б) $6\sqrt{11}$.

№ 2. В треугольнике ABC вписанная окружность касается стороны AC в точке B_1, а вневписанная окружность касается этой же стороны в точке B_2. Известно, что отрезки BB_1 и BB_2 равны. Верно ли, что $\triangle ABC$ — равнобедренный?

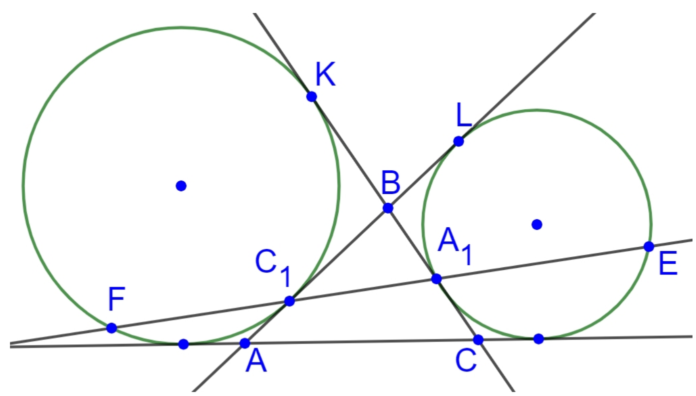
Решение.
Заметим, что $AB_1+B_1C+CA_1+A_1B+BC_1+C_1A = P_{ABC}$. Из равенства отрезков касательных получим: $AB_1+CA_1+A_1B = p$. Откуда $AB_1 = p - BC$.
Также заметим, что $BA_2 = BC_2$ как отрезки касательных, при этом $BA_2+BC_2 = BC+CA_2+BA+AC_2 = BA+BC+AC = P$, откуда $BC_2 = p$ и $CB_2 = p-a$.
Поскольку $BB_1 = BB_2$, углы $\angle BB_1A = \angle BB_2C$ как смежные с равными углами.
Отсюда получаем, что $\triangle ABB_1 = \triangle CBB_2$, следовательно, $AB = BC$ и $\triangle ABC$ — равнобедренный.



Замечание: в случае равнобедренности $\triangle ABC$ точки B_1 и B_2 совпадут, однако, все рассуждения в решении останутся верными.

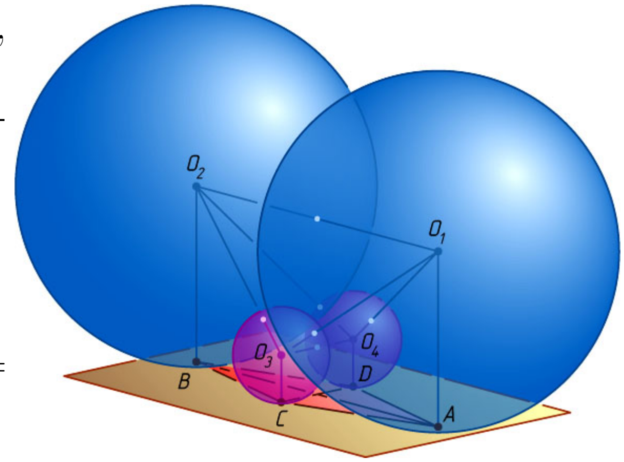
№ 3. В треугольнике одна вневписанная окружность касается стороны AB в точке C_1, а другая — стороны BC в точке A_1. Докажите, что на прямой A_1C_1 построенные вневписанные окружности высекают равные отрезки.

Решение.
Запишем свойство касательной и секущей, проведенных к окружности из одной точки:
$A_1K^2 = A_1F \cdot A_1C_1$ и $C_1L^2 = C_1E \cdot C_1A_1$.
Поскольку $A_1K = C_1L$, то из этих равенств следует, что $A_1F = C_1E$, откуда $A_1E = C_1F$.
Что и требовалось доказать.



№ 4. Два одинаковых шара радиуса $\sqrt{15}$ и два одинаковых шара меньшего радиуса расположены на плоскости так, что каждый шар касается трех других. Найдите площадь поверхности S шара меньшего радиуса.
Решение.
Пусть O_1 иO_2 — центры больших шаров радиуса R, A и B — их точки касания с данной плоскостью; O_3 и O_4 — центры меньших шаров радиуса r; C и D — их точки касания с данной плоскостью.

Тогда $ACBD$ — ромб с диагоналями $2r$ и $2R$.
С одной стороны, $AC = \sqrt{r^2 + R^2}$. С другой стороны, из задачи 1а) имеем $AC = 2\sqrt{Rr}$ (из задачи №1).
Получим уравнение $2\sqrt{Rr} = \sqrt{r^2 + R^2}$, откуда находим, что $\dfrac{R}{r} = 2 \pm \sqrt{3}$.



Так как $\dfrac{R}{r} > 1$, то искомое отношение равно $2 + \sqrt{3}$.

Поскольку $R = \sqrt{15}$, получаем $r = \dfrac{R}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{15} \cdot (2 - \sqrt{3})$.
Площадь поверхности меньшего шара равна $4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{15} \cdot (2 - \sqrt{3})\right)^2 = 4 \cdot \pi \cdot 15 \cdot \left(7 - 4\sqrt{3}\right) = 60\pi \cdot (7 - 4\sqrt{3})$.
Ответ: $60\pi \cdot (7 - 4\sqrt{3})$.