ЗАДАНИЯ II РЕГИОНАЛЬНОГО ЭТАПА
Творческого конкурса учителей математики общеобразовательных организаций Республики Адыгея
2017 год

20 апреля 2017 года

1. Машинист поезда дядя Петя очень любит точность и сильно расстроился, когда его состав задержали на станции на 2 часа. «Ничего страшного, дядя Петя», – сказал его помощник Вася – «Через 40 километров следующая станция. Увеличим скорость всего на 20 км/ч и нагоним! Я математику знаю». «Наверное, ты не очень хорошо в школе учился», – сказал дядя Петя. Кто из машинистов прав?

2. Решите неравенство:

$$\log_{x^2}(x-1) \geq \log_{6-x}(x-1).$$

3. Даны две окружности радиусами 1 и 9. Расстояние между центрами окружностей равно 17. Найдите радиус третьей окружности, касающейся двух данных окружностей и их общей внешней касательной.

4. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Условие». Сколькими способами можно разбить 10 человек на две команды по пять человек для игры «Математическая драка»?

«Решение».

Так как всего 10 человек, то

1$^{\text{го}}$ члена команды номер 1 можно выбрать 10-ю способами,

2$^{\text{го}}$ члена команды номер 1 можно выбрать 9-ю способами,

3$^{\text{го}}$ члена команды номер 1 можно выбрать 8-ю способами,

4$^{\text{го}}$ члена команды номер 1 можно выбрать 7-ю способами,

5$^{\text{го}}$ члена команды номер 1 можно выбрать 6-ю способами.

Итак, первую команду можно собрать $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$ способами.

Так как осталось 5 человек, то

1$^{\text{го}}$ члена команды номер 2 можно выбрать 5-ю способами.

2$^{\text{го}}$ члена команды номер 2 можно выбрать 4-я способами.

3$^{\text{го}}$ члена команды номер 2 можно выбрать 3-я способами.

$4^{го}$ члена команды номер 2 можно выбрать 2-я способами.

$5^{го}$ члена команды номер 2 можно выбрать 1 способом.

Итак, вторую команду можно собрать $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ способами.

Всего способов разбиения на команды $30240 \times 120 = 3628800$.

«Ответ». 3628800.

5. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Условие». Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчеты показали, что для этого бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

«Решение».

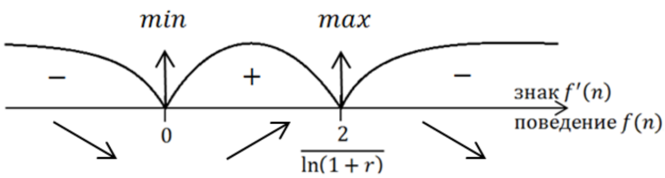
Составим функцию $f(n) = n^2(1 + r)^{25-n}$ суммы на счете пенсионного фонда в случае продажи ценных бумаг в год с номером n.

Найдем производную данной функции:

$$f'(n) = 2n(1 + r)^{25-n} + n^2(1 + r)^{25-n} \ln(1 + r)\,(-1) = (1 + r)^{25-n}(2n - n^2 \ln(1 + r))$$
$$= (1 + r)^{25-n} n(2 - \mathrm{n} \ln(1 + r)).$$

$$f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \text{ или } n = \frac{2}{\ln(1 + r)}.$$

Нанесём на числовую прямую нули производной и определим её промежутки знакопостоянства.



Получаем, что $n = \frac{2}{\ln(1+r)}$ – точка максимума функции $f(n)$. Тогда по условию $\frac{2}{\ln(1+r)} = 21$, откуда находим $r = e^{10,5} - 1$.

«Ответ». $e^{10,5} - 1$.