Творческий конкурс учителей математики. Заочный этап

1 марта 2016 г.

1. В городском парке стоят две тележки с мороженым. 40% мороженого из первой тележки - шоколадное, а из второй - 20%. Всего в двух тележках 35% шоколадного мороженого. Найти вероятность того, что мороженое, купленное в парке, окажется из первой тележки.

2. Решите уравнение:
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$$

3. Тарас и Лена по очереди наполняют из крана лейки, каждая из которых наполняется за 10 сек. Сразу после их наполнения Тарас и Лена поливают цветы, опустошая лейки соответственно за 30 и 45 сек, потом опять их наполняют водой. Если лейки не подставлены под кран, вода наполняет бочку, которая стоит под краном. Пустая бочка может наполниться за 15 мин. Кто из детей первым подойдет набирать воду после того, как бочка наполнится?

4. В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно

только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

«Условие». Сравните $\log_2 5 - \log_3 4$ и 1.

«Решение». Пусть $A = \log_2 5 - \log_3 4 = \log_2 2,5 + 1 - 2\log_3 2 = y + 1$, где $y = \log_2 2,5 - 2\log_3 2$. Так как $0 < \log_3 2 < 1$, то $0 < 2\log_3 2 < 2$.

Так как $\log_2 2,5 < \log_2 4 = 2$, то $y < 0$. Следовательно, $A = y + 1 < 1$. Значит, $\log_2 5 - \log_3 4 < 1$.

5. В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

   «Условие». Ортотреугольники. Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника . Докажите, что треугольники ABC и BCH имеют общий центр описанной окружности.

   «Доказательство». Прежде чем доказывать утверждение теоремы докажем вспомогательное утверждение.

   1) **«Лемма»**. Прямые, проходящие через вершины треугольника перпендикулярно соответствующим сторонам ортотреугольника (треугольника, вершинами которого являются основания высот), пересекаются в одной точке.

   «Доказательство леммы». Пусть AA', BB' и CC'

– высоты треугольника ABC, O – центр окружности, описанной около этого треугольника. Докажем перпендикулярность прямых OB и $A'C'$. Пусть $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle AOB = 2\gamma, \angle OBA = \angle OAB = 90 - \gamma$. С другой стороны, из того, что каждый из треугольников $BC'A'$ и $B'AC'$ подобен данному треугольнику, следует, что $\angle AC'B' = \angle BC'A' = \gamma$, поэтому, $C'C$ – биссектриса угла C' ортотреугольника $A'B'C'$. Следовательно, $\angle A'C'C = \frac{1}{2}\angle A'C'B' = \frac{1}{2}(180 - 2\gamma) = 90 - \gamma = \angle OBA$. Так как $CC' \perp AB$, то из полученного равенства углов следует искомая перпендикулярность прямых. Аналогично доказывается, что $OA \perp B'C'$ и $OC \perp A'B'$, то есть, прямые, о которых говорится в условии «леммы», пересекаются в точке O.

2) Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC, в котором H – ортоцентр. Очевидно, что у треугольников ABC и BCH один и тот же ортотреугольник. По доказанной лемме эти треугольники имеют общий центр описанной окружности (поскольку эти центры можно получить как пересечение перпендикуляров к сторонам ортотреугольника из общих вершин B и C), что и требовалось доказать.

6. Опишите пример из Вашей педагогической практики, когда Вы или Ваши ученики допускали неявные математические ошибки в решении задач. Приведите условие задачи, ее неверное решение, укажите ошибки и покажите верное решение задачи.