

XV Региональная олимпиада РЕМШ при АГУ по математике

2013-2014 уч. год

11 класс

Вариант 1

1) Решите неравенство

$$\frac{3 \cdot 2^{1-x} + 1}{2^x - 1} \geq \frac{1}{1 - 2^{-x}}$$

2) Вычислите $\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2} - \frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}$ при $x = 1, \underbrace{2 \dots 22}_{46}$, $y = -2, \underbrace{7 \dots 78}_{45}$.

3) Решите уравнение $\log_4(4 \sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2 \operatorname{tg} x)$.

4) На окружности взята точка A , на ее диаметре BC – точки D и E , а на его продолжении за точку B – точка F . Найдите BC , если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

5) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все ребра которой равны 2, точка M – середина ребра AB , точка O – центр основания пирамиды, точка F – делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки C до прямой MF .

6) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

XV Региональная олимпиада РЕМШ при АГУ по математике

2013-2014 уч. год

11 класс

Вариант 2

1) Решите неравенство $\frac{1}{5^{-x}-1} \geq \frac{2-3 \cdot 5^{1-x}}{5^x-1}$.

2) Вычислите $\frac{2xy(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2} + \frac{(x+y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$ при $x = -1, \underbrace{6 \dots 6}_{44}7$, $y = -1, \underbrace{3 \dots 3}_{45}3$.

3) Решите уравнение $\log_4(4 \operatorname{ctg}^2 x) - \log_2(-2 \sin 2x) = 1$.

4) На диаметре АВ окружности взяты точки С и D, на его продолжении за точку В – точка Е, а на окружности – точка F, причем $\angle AFC = \angle BFE$, $\angle DAF = \angle BFD$, $AB = 8$, $CB = 6$ и $DB = 5$. Найдите BE.

5) В правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S, все ребра которой равны 6, точка М – середина ребра ВС, точка О - центр основания пирамиды, точка F - делит отрезок SO в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки А до прямой MF.

6) Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$||x - a| + 2x| + 4x = 8|x + 1|$$

не имеет ни одного корня.

XV Региональная олимпиада РЕМШ при АГУ по математике

2013-2014 уч. год

10 класс

1) Найти отношение суммы первых $2n$ членов арифметической прогрессии к сумме следующих $2n$ ее членов, если сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов, а разность d прогрессии не равна нулю.

2) Вычислите $\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2} - \frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}$ при $x = 1, \underbrace{2 \dots 22}_{46}$, $y = -2, \underbrace{7 \dots 78}_{45}$.

3) Решите уравнение $\cos(x^2 + x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

4) На окружности взята точка A , на ее диаметре BC – точки D и E , а на его продолжении за точку B – точка F . Найдите BC , если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

5) Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 3, \\ x^2 + y^2 \geq 3(2y - 2x - 3), \\ (2x + y - 3)(x + 5y + 3) \leq 0. \end{cases}$$

6) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.