ЗАДАНИЯ ОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных учреждений Республики Адыгея
2014 год

1. Что больше: $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$ или меньший корень квадратного трехчлена $11x^2-17x-13$?

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geq 5,\\ \log_{x+1}(x^2+x-6)\geq 4.\end{cases}$$

3. При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5+2x^4+ax^2+bx=c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1?

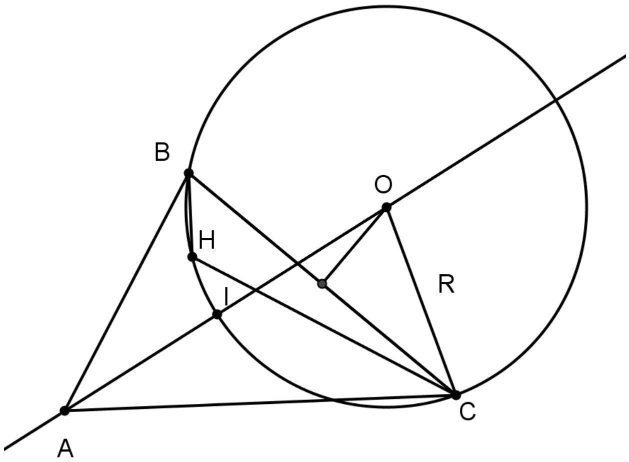
4. В корзине лежат p черных и q белых шаров. Имеется также мешок, в котором сколь угодно много черных шаров. За один ход разрешается взять наугад из корзины два шара. Если вынутые шары разных цветов, то белый шар возвращается в корзину, а черный выбрасывается. Если же вынутые шары одного цвета, то оба шара выбрасываются, а в корзину кладется черный шар из мешка. Какова вероятность того, что последний шар, оставшийся в корзине после таких ходов, окажется белым?

5. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Условие задачи:

В остроугольном треугольнике ΔABC I – центр вписанного круга, H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности около треугольника ΔBHC. Чему могут равняться углы ΔABC, если точки O, I и A лежат на одной прямой?

Решение.



$\angle BHC = 180° - \angle A \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin(180° - \angle A)} = \frac{BC}{2\sin A} \Rightarrow R$ равно радиусу описанной окружности ΔABC.

$$\frac{1}{2}BC = OC \cdot \cos(\angle OCB) \Leftrightarrow \cos(\angle OCB) = \frac{BC}{2R} = \sin A\,; \angle OCB = 90° - \angle A.$$

Рассмотрим ΔAOC: $\angle OAC = \frac{1}{2}\angle A, \angle OCA = \angle C + 90° - \angle A \Rightarrow$

$\angle AOC = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle A + \angle C + 90° - \angle A\right) = (\angle A + \angle B + \angle C) - \angle C - 90° + \frac{1}{2}\angle A = \frac{3}{2}\angle A + \angle B - 90°.$

$$\frac{OC}{\sin\angle OAC} = \frac{AC}{\sin\angle AOC} \Leftrightarrow \frac{R}{\sin\left(\frac{1}{2}\angle A\right)} = \frac{2R\sin B}{\sin\left(\frac{3}{2}\angle A + \angle B - 90°\right)};$$

$$2\sin B \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\angle A\right) = -\cos\left(\frac{3}{2}\angle A + \angle B\right);$$

$$2\sin B \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\angle A\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\angle A\right) \cdot \cos B - \sin\left(\frac{3}{2}\angle A\right) \cdot \sin B = 0;$$

$$\left(4\sin^2\left(\frac{1}{2}\angle A\right)-1\right)\cdot\left(\sin B\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\angle A\right)-\cos B\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right)\right)=0;$$

$$(2\cos A-1)\cos\left(\angle B+\frac{1}{2}\angle A\right)=0;$$

1) $\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle A=60°$;

2) $\angle B+\frac{1}{2}\angle A=90°\Rightarrow\angle B+\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\Rightarrow\angle B=\angle C$.

Ответ:

1) $\angle A=60°, \angle B+\angle C=120°, \angle B<90°, \angle C<90°$;

2) $\angle B=\angle C>45°, \angle A=180°-2\angle B$.