ЗАДАНИЯ ЗАОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных учреждений Республики Адыгея 2014 год

1. В соревнованиях по биатлону участвуют 6 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов, 5 спортсменов из Китая, 7 спортсменов из США и 4 спортсмена из Франции. Порядок выступления спортсменов определяется жеребьевкой. Найдите:

   а) вероятность того, что Руслан Орлов выступит первым, вторым или третьим;

   б) вероятность того, что хотя бы один из спортсменов из России выступит первым, вторым или третьим.

2. Льюис Кэрролл как-то отправил своей племяннице следующий отчёт:

	Фунты	Шиллинги	Пенсы
За похищенную перчатку		2	0
За боль от потери		3	8,5
За доставленное беспокойство		4	4,5
За причинённые неприятности		14	7
За время, потраченное на поиски вора		1	6
ИТОГО	1	6	2

   Зная, что в фунте больше шиллингов, чем в шиллинге пенсов, выясните, сколько в фунте шиллингов, а в шиллинге пенсов.

3. Решите уравнение:

$$\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -6\log_3^2\frac{1}{x}.$$

4. В основании пирамиды – правильный треугольник со стороной $\sqrt{6}$. Боковые грани пирамиды равновелики. Одно из боковых ребер равно $3\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.

5. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

   Условие задачи:
   В круг радиуса R впишите равнобедренный треугольник наименьшей площади.
   Решение:
   Пусть угол при вершине равнобедренного треугольника равен α. Тогда боковая сторона треугольника: $b = 2\cos\frac{\alpha}{2}$. Площадь треугольника:
   $S = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha = 2R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Используя тригонометрические формулы, получим: $S = R^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$.
Найдем производную: $S' = R^2(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$.
Сделаем замену: $t = \cos\alpha$. Корни получившегося квадратного трехчлена $2t^2 + 2t - 1$ равны -1 и $0{,}5$. На промежутке $(-1; 0{,}5)$ его значения отрицательны, а на промежутке $(0{,}5; 1)$ – положительны, то есть «при переходе» через $0{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, а, значит, эта точка является точкой минимума. Таким образом, наименьшее значение площади достигается при $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, т.е. при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
Таким образом, наименьшую площадь имеет равнобедренный треугольник с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.
Ответ: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

6. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Условие задачи:
ABCDE – правильный пятиугольник. Точка M обладает таким свойством, что ΔDEM – равносторонний. Найдите величину угла AMC.
Решение:

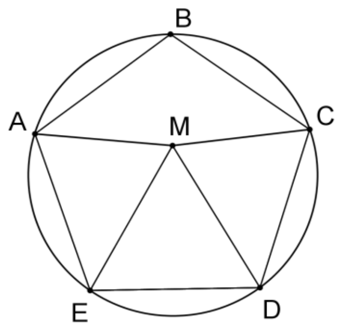

Рис. 1.

Так как внутренний угол правильного пятиугольника равен $108°$, то $\angle MDC = \angle EDC - \angle EDM = 108° - 60° = 48°$ (рис. 1). В силу того, что ΔMDC – равнобедренный $(MD = DC)$, то $\angle DMC = \frac{1}{2}(180° - 48°) = 62°$. Аналогично устанавливаем, что $\angle EMA = 62°$. Отсюда $\angle AMC = 360° - (60° + 62° + 62°) = 176°$.
Ответ: $176°$.