Материалы для проведения регионального этапа

XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2010–2011 учебный год

Первый день

25–26 января 2011 г.

Москва, 2010

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.Я. Белов-Канель, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, А.А. Гаврилюк, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, В.Б. Мокин, В.А. Омельяненко, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2010–2011 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 25 и 26 января 2011 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны? (*Л. Емельянов*)

Ответ. Нет, неверно.

Решение. Подойдёт, например, тройка 1/3, 1/3, 2/3.

Замечание. Все такие тройки можно получить, решив соответствующую систему: $a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$. Из первых двух равенств имеем $a^2 - a = b^2 - b$; перенося всё в левую часть, получаем $(a - b)(a + b - 1) = 0$. Значит, $a = b$ или $b = 1 - a$; аналогичные утверждения верны для остальных пар чисел. Итого, кроме троек из равных чисел, подходят все тройки вида $a, a, 1 - a$ и только они.

9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны. (*Р. Женодаров*)

Решение. Обозначим через Ω и ω описанные окружности треугольников ABC и BDE. Положим $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Четырёхугольник $BDAC$ вписан в Ω, значит, $\angle ADB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \alpha$. Углы ADB и EDB — смежные, откуда $\angle EDB = 180^\circ - \angle ADB = \alpha$.

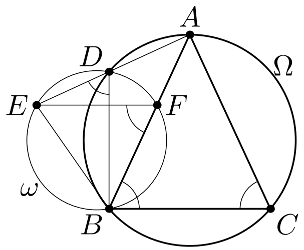

Рис. 1

Далее, поскольку четырёхугольник $EDFB$ вписан в ω, имеем $\angle EFB = \angle EDB = \alpha$.

Итого, $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$, а значит, прямые EF и BC параллельны.

9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей. (*Д. Храмцов*)

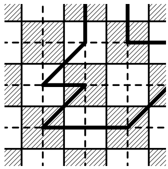

Рис. 2

Решение. Проведём пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали. Поэтому пунктирные прямые разбивают область, ограниченную ломаной, на единичные квадратики и половинки квадратиков, получаемые разрезанием их по диагонали.

Осталось заметить, что в каждом таком квадратике и в каждом таком треугольнике площади чёрной и белой частей равны. Действительно, каждый квадратик содержит по две четверти клеток обоих цветов, а треугольник — четверть клетки одного цвета и два треугольничка, каждый из которых составляет восьмую часть клетки другого цвета.

Комментарий. Рассмотрение некоторых конкретных ломаных без описания общей идеи решения — 0 баллов.

9.4. Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\,.$$

(*А. Храбров, Б. Трушин*)

Решение. Заметим, что $\dfrac{a+1}{b+1} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b-a}{b(b+1)}$ для любых положительных a и b. Значит, после переноса всех членов в левую часть требуемое неравенство приобретает вид

$$\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Можно считать, что x — наибольшее из трёх данных чисел. Возможны два случая.

Случай 1. $y \geqslant z$. В этом случае имеем

$$\frac{x-y}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-y}{y(y+1)}, \quad \frac{y-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)} - \frac{z-y}{z(z+1)},$$

что равносильно (1).

Случай 2. $y < z$. Тогда имеем

$$\frac{z-y}{z(z+1)} \leqslant \frac{z-y}{y(y+1)}, \quad \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)},$$

что опять же равносильно (1).

Комментарий. Существуют два различных варианта упорядочения переменных, с точностью до циклической перестановки (в авторском решении это варианты $x \geqslant y \geqslant z$ и $x \geqslant z \geqslant \geqslant y$). Правильное рассмотрение только одного из таких случаев — ставить 3 балла.

10 класс

10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй. (*И. Рубанов*)

Решение. Первый мог обогнать второго только на кольцевой дорожке стадиона. Так как он вбежал на стадион первым, на своём первом круге он обогнать второго не мог. Стало быть, обгоны случились, когда первый бежал по стадиону свои второй и третий круги. Пока первый бежал эти два круга, он обогнал второго по крайней мере на круг. Следовательно, второй за это время пробежал не больше одного круга, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Комментарий. Если в решении рассмотрен лишь некоторый частный случай (например, без обоснования говорится, что достаточно рассмотреть лишь случай, когда первая встреча происходит в тот момент, когда второй бегун вбегает на стадион, или без обоснования утверждается, что «наихудший случай — если вторая встреча произошла на финише») — ставится не более 3 баллов за всю задачу.

10.2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CBK$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности. (*Т. Емельянова*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит между A и K. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры описанных окружностей треугольников ABM, ABK, CBM и CBK соответственно. Прямые O_1O_3 и O_1O_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BM и AB, соответственно. Значит, углы $O_2O_1O_3$ и ABM равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (см. рис. 3). Аналогично, $\angle O_2O_4O_3 = \angle CBK$, а значит, $\angle O_2O_4O_3 = \angle O_2O_1O_3$. Это и означает, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 лежат на одной окружности.

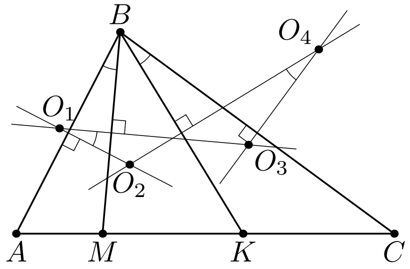

Рис. 3

Замечание. Нетрудно видеть, что точка пересечения прямых O_1O_2 и O_3O_4 — центр O описанной окружности треугольника ABC, причём точки O_2 и O_3 лежат на отрезках OO_1 и OO_4, соответственно. Это позволяет обосновать расположение точек на рисунке.

Комментарий. За отсутствие обоснования расположения точек баллы не снимаются.

10.3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_\ell$, где $1 \leqslant k, \ell \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)? (*П. Кожевников*)

Ответ. Не может.

Решение. Пусть среди наших 14 чисел есть a чётных и $b = 14 - a$ нечётных. Нечётное число на доске может появиться лишь как сумма чётного и нечётного, т.е. таких чисел будет ab (при этом каждое будет выписано по два раза). Но $ab = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} = 49$. Значит, на доске будет не более 49 различных нечётных чисел; а, чтобы выполнялось условие, их должно быть хотя бы 50. Значит, требуемое невозможно.

Комментарий. Доказано только, что на доску выписаны не более 105 различных чисел — 0 баллов.

10.4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трёх уравнений $ax^{11} + bx^4 + c = 0$, $bx^{11} + cx^4 + a = 0$, $cx^{11} + ax^4 + b = 0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень. (*И. Богданов*)

Решение. Заметим сразу, что все корни наших уравнений — ненулевые, поскольку свободные члены не равны нулю.

Пусть p — общий корень первых двух уравнений. Тогда имеем

$$0 = b(ap^{11} + bp^4 + c) - a(bp^{11} + cp^4 + a) = p^4(b^2 - ac) - (a^2 - bc),$$
$$0 = b(bp^{11} + cp^4 + a) - c(ap^{11} + bp^4 + c) = p^{11}(b^2 - ac) - (c^2 - ab).$$

Отсюда следует, что если одно из чисел $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ равно нулю, то и все три равны нулю. Но тогда $a/b = b/c = c/a$, а поскольку произведение этих чисел равно 1, то и все они равны 1, то есть $a = b = c$. В этом случае утверждение задачи очевидно.

В противном случае все три числа $|a^2 - bc|$, $|b^2 - ac|$, $|c^2 - ab|$ ненулевые. Переименовав, если надо, переменые по циклу, можно считать, что $|b^2 - ac|$ — среднее по величине из них. Тогда из полученных выше равенств следует, что одно из чисел $|p|^4 = \dfrac{|a^2 - bc|}{|b^2 - ac|}$ и $|p|^{11} = \dfrac{|c^2 - ab|}{|b^2 - ac|}$ не больше единицы, а другое — не меньше единицы. Это возможно лишь тогда, когда оба они равны единице, то есть $|p| = 1$, $|a^2 - bc| = |b^2 - ac| = |c^2 - ab|$. Обозначая через q и r общие корни в других парах, получаем теперь из аналогичных равенств $|q| = |r| = |p| = 1$, и два из чисел p, q, r равны, скажем, $p = q$. Но тогда это число является общим корнем всех трёх уравнений.

Комментарий. Получено выражение общего корня p двух уравнений (или его степени) через a, b, c — 1 балл.

Получены два *существенно* различных выражения степеней p через a, b, c (как, например, выражения $p^4 = \dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac}$ и $p^{11} = \dfrac{c^2 - ab}{b^2 - ac}$ в авторском решении) — 2 балла.

Если вдобавок к предыдущему продвижению разобран случай обращения в 0 одного из выражений $b^2 - ac$, $c^2 - ab$, $a^2 - bc$ — добавить ещё 1 балл.

11 класс

11.1. Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \cos 5\alpha$ рациональны?

(*В. Сендеров*)

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим противное. Тогда число $A = \cos\alpha+\cos 5\alpha$ иррационально как сумма рационального и иррационального; с другой стороны, $A = 2\cos 2\alpha\cos 3\alpha$ рационально как произведение трёх рациональных чисел. Противоречие.

Замечание. Если убрать из условия $\cos 5\alpha$, то ответ будет другим. Например, при $\alpha = \pi/6$ число $\cos\alpha$ иррационально, а числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha$ рациональны.

С другой стороны, из решения видно, что $\cos 4\alpha$ можно удалить из условия безболезненно.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.

(*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Решение. Предположим, что среди данных чисел четное количество отрицательных. Тогда среди них есть положительное число a, и произведение всех чисел, кроме a, положительно. Это противоречит условию.

Значит, среди данных чисел нечетное число отрицательных. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — две группы, на которые разбиты данные числа ($k + m = 2011$). Ровно одно из двух произведений $x_1x_2\ldots x_k$ и $y_1y_2\ldots y_m$ (а именно то, в котором нечётное число отрицательных сомножителей) — отрицательно; пусть для определенности $x_1x_2\ldots x_k < 0$, $y_1y_2\ldots y_m > 0$. Тогда среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ найдется отрицательное, скажем, $x_1 < 0$. Отсюда $x_2\ldots x_k > 0$, а значит, $x_2\ldots x_k \geqslant 1$ (так как данные числа целые). Следовательно, $x_1x_2\ldots x_k + y_1y_2\ldots y_m \leqslant$

$\leqslant x_1 + y_1y_2 \dots y_m \leqslant x_1 + y_1y_2 \dots y_mx_2 \dots x_k$. Но по условию $x_1 + y_1y_2 \dots y_mx_2 \dots x_k < 0$.

Замечание. Можно показать, что условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда среди данных чисел ровно одно отрицательное, и его модуль больше произведения всех остальных.

Комментарий. Доказано, что среди данных чисел нечетное число отрицательных — 2 балла.

11.3. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM : MD = 2$. Пусть O — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD. (*В. Шмаров*)

Решение. Отметим на продолжении отрезка AD такую точку T, что $AT = DM$. Тогда прямоугольные треугольники CDM и BAT равны, а значит, $BT \parallel CM$. Заметим, что $DT = DA + AT = 3DM + DM = 4DM$. По теореме Фалеса, прямая CM пересекает отрезок BD в точке N такой, что $DB = 4DN$. Значит, $DN = NO$, то есть KN — медиана треугольника OKD.

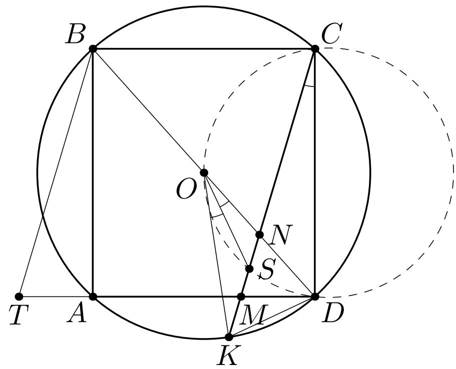

Рис. 4

Пусть S — точка пересечения медиан треугольника OKD. Поскольку $OD = OK$, точка S лежит на биссектрисе угла KOD, и $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD$. С другой стороны, вписанный угол KCD равен половине центрального угла KOD, откуда $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD = \angle SCD$. Это и означает, что точки S, D, O, C лежат на одной окружности.

Комментарий. Доказано, что прямая KC делит отрезок OD пополам — 2 балла.

11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots, x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

(*Р. Карасёв*)

Ответ. За 2010 рейсов.

Решение. Покажем вначале, что за 2009 рейсов план выполнить удастся не всегда. Пусть (при произвольной схеме дорог) изначально весь цемент расположен на одном складе S, а распределить его нужно по всем складам поровну. Тогда на каждый склад, кроме S, нужно в каком-нибудь рейсе цемент завезти; ясно, что такие 2010 рейсов различны, поэтому всего рейсов должно быть не меньше 2010.

Нам осталось показать, что за 2010 рейсов план всегда удастся выполнить. Мы докажем индукцией по n, что при n складах всегда удастся обойтись $n-1$ рейсом. База при $n=1$ очевидна.

Пусть $n > 1$. Так как с любого склада можно добраться до любого другого, то существует маршрут, проходящий по всем складам (может быть, неоднократно). Рассмотрим любой такой маршрут и склад A, который впервые появился на этом маршруте позже всего. Тогда, если удалить склад A и все дороги, ведущие из него, то по-прежнему от любого склада до любого другого можно добраться (по предыдущим дорогам маршрута).

Можно считать, что A — склад с номером n. Если $y_n \leqslant x_n$, то вывезем из A на любой соединённый с ним склад $x_n - y_n$ кг цемента, а после этого забудем про него и про все дороги, из него ведущие. По предположению индукции, для оставшихся складов можно выполнить план за $(n-1)-1$ рейс. В итоге через $(n-2)+1$ рейс получится требуемое распределение цемента.

Если же $y_n > x_n$, то мы уже доказали, что из распределения, когда на i-м складе находится y_i кг, можно получить распределение, когда на i-м складе находится x_i кг, за $n-1$ рейс. Проведя теперь все эти перевозки в обратном порядке (и обратном направлении), мы осуществим требуемый план.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только предъявлен пример, показывающий, что за 2009 рейсов план выполним не всегда — 2 балла.

Доказано только, что 2010 рейсов хватит всегда — 5 баллов.

Материалы для проведения регионального этапа

XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2010–2011 учебный год

Второй день

25–26 января 2011 г.

Москва, 2010

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.Я. Белов-Канель, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, А.А. Гаврилюк, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, В.Б. Мокин, В.А. Омельяненко, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2010–2011 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 25 и 26 января 2011 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{3}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$ и $n = 2$, получаем, что числа $15a$ и $48a$ — целые. Значит, и число $48a - 3 \cdot 15a = 3a$ — тоже целое. Таким образом, $a = k/3$ для некоторого целого k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чётных (или нечётных) чисел n, $n+2$, $n+4$ делится на 3; значит, $n(n+2)(n+4)$ делится на 3, а поэтому $an(n+2)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+4)}{3}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC.

Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой. (*В. Шмаров*)

Решение. Предположим противное; тогда исходные три точки лежат на некоторой окружности ω. Докажем индукцией по количеству минут, что все отмеченные точки также лежат на ω. Действительно, изначально это верно. Пусть в некоторый момент по точкам A, B, C строится точка D. Тогда серединный перпендикуляр ℓ к BC проходит через центр ω, значит, эта окружность симметрична относительно ℓ. Так как точка A лежит на ω, то и D также на ней лежит.

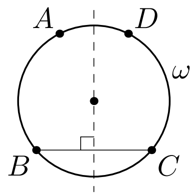

Рис. 1

Итак, через сутки все отмеченные точки лежат на ω. Но любая прямая пересекает ω не более, чем по двум различным точкам; значит, на ней не найдётся трёх отмеченных точек. Противоречие.

Комментарий. Указано без доказательства, что все отмеченные точки лежат либо на одной окружности, либо на одной прямой — 2 балла.

9.7. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных. (*В. Сендеров*)

Ответ. $2, 3, 5$.

Решение. Ясно, что любые два числа тройки различны (если $p = q$, то $p^4 - 1$ не делится на q). Пусть для определённости p — наименьшее из чисел тройки. Нам известно, что число $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ делится на qr. Заметим, что $p - 1$ меньше любого из простых чисел q и r, а значит, взаимно просто с ними. Далее, число $p^2 + 1$ не может делиться на оба числа q и r, так как $p^2 + 1 < (p+1)(p+1) < qr$. Значит, $p + 1$ делится на одно из них (для определённости, на q). Поскольку $q > p$, это возможно лишь при $q = p + 1$. Тогда одно из чисел p и q чётно, а поскольку оно простое, то $p = 2$, $q = 3$. Наконец, r является простым делителем числа $p^4 - 1 = 15$, отличным от $q = 3$, значит, $r = 5$.

Осталось проверить, что тройка $2, 3, 5$ удовлетворяет условиям задачи.

Комментарий. Только правильный ответ — 1 балл.

Идея выбора наименьшего p из трех простых чисел для исследования делимости $p^4 - 1$ на qr оценивается в 1 балл.

При верном решении отсутствует указание на необходимость проверки того, что полученная тройка подходит — снимается 1 балл.

9.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника? (*А. Магазинов*)

Ответ. $N = 102$.

Решение. Первое решение. Пусть $N \leqslant 101$. Распилим палку на $N - 1$ палочки длиной 1 см и одну палочку длиной $(201 - N)$ см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной $201 - N \geqslant 100$ см не может быть частью никакой стороны. Таким образом, $N \geqslant 102$.

Покажем, что при $N = 102$ искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше $2 \cdot 101 + 1 = 203$ см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ см, тогда имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 198$. Среди 100 чисел $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, A_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это A_k и A_ℓ, $k < \ell$. Число $A_\ell - A_k$ строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит, $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_\ell$.

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник 1×99 см.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что при $N = 102$ сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{102} = 200$. Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника T, вписанного в эту окружность. Вершины T разбиваются на пары противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D, причём суммарные длины в группах A и C, а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что $N \geqslant 102$ — 1 балл.

Доказано, что $N = 102$ подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.

10 класс

10.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{6}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $60a$, $630a$ и $24 \cdot 56a$ — целые. Значит, a — рациональное число, знаменатель q которого в несократимой записи является делителем чисел 60, 630 и $24 \cdot 56$. Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на q. Поскольку $\text{НОД}(60, 630) = 30$, а $24 \cdot 56$ не делится на 5, то q — делитель числа 6, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел $n+2$, $n+3$, $n+4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n+2$, $n+3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому $an(n+2)(n+3)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел? (*И. Богданов*)

Ответ. 2009.

Решение. Положим $n = 2011$. Упорядочим выписанные числа в неубывающем порядке: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Поскольку число $a_1 + a_2 + a_3$ выписано, то $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant a_1$, откуда $a_2 + a_3 \geqslant 0$. Аналогично получаем $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \leqslant a_n$, откуда $a_{n-2} + a_{n-1} \leqslant 0$. Итак, $0 \geqslant a_{n-2} + a_{n-1} \geqslant a_2 + a_3 \geqslant 0$; значит, $a_2 + a_3 = a_{n-2} + a_{n-3} = 0$. Так как $a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_{n-2} \leqslant a_{n-1}$, отсюда вытекает, что $a_2 = a_3 = a_{n-2} = a_{n-1}$, а значит, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Итак, среди выписанных чисел хотя бы 2009 нулей.

Пример из 2009 нулей и чисел 1, -1 показывает, что нулей может быть ровно 2009.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что нулей может быть ровно 2009 — 1 балл.

Доказано только, что нулей должно быть не меньше 2009 — 5 баллов.

Показано только, что $a_2 + a_3 \geqslant 0$ (или $a_{n-1} + a_{n-2} \leqslant 0$) — 1 балл.

Показано только, что среди выписанных чисел не более двух положительных и/или не более двух отрицательных — 3 балла.

10.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Положим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$; тогда $AB' = c\cos\alpha$, $AC' = b\cos\alpha$. Пусть BB' и CC' — высоты треугольника. Так как OB_0 и OC_0 — серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB, то отрезки $B'B_0$ и $C'C_0$ равны высотам ромба $OPHQ$, значит, $B'B_0 = C'C_0$, откуда $|AB_0 - AB'| = |AC_0 - AC'|$, или

$$\left|\frac{b}{2} - c\cos\alpha\right| = \left|\frac{c}{2} - b\cos\alpha\right|. \qquad (*)$$

В случае, если в левой и правой частях модули раскрываются с одним знаком, имеем $\frac{b}{2} - c\cos\alpha = \frac{c}{2} - b\cos\alpha$, т.е. $b\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right) = c\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right)$. По условию $\alpha < 90^\circ$, поэтому $\cos\alpha > 0$ и, значит, $b = c$, что противоречит условию.

Предположим теперь, что модули в равенстве $(*)$ раскрываются с разными знаками, скажем, $\frac{b}{2} - c\cos\alpha > 0$ и $\frac{c}{2} - b\cos\alpha < 0$

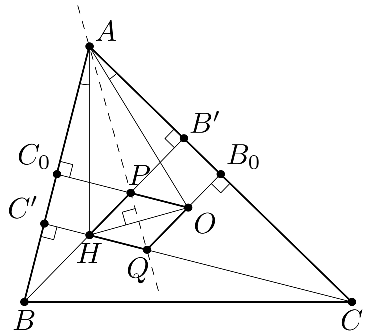

Рис. 2

(геометрически это означает, что точка B' лежит между A и B_0, а точка C_0 — между A и C', см. рис. 2). Тогда $\frac{b}{2} - c\cos\alpha = b\cos\alpha - \frac{c}{2}$, или $\frac{b+c}{2} = (b+c)\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\alpha = 60^\circ$.

Тогда $AC' = b\cos\alpha = \frac{b}{2} = AB_0$, значит, точки B_0 и C' симметричны относительно биссектрисы угла BAC. Тогда прямые OB_0 и CC' также симметричны, и их точка пересечения Q лежит на биссектрисе угла BAC. Аналогично, точка P лежит на биссектрисе угла BAC.

Замечание. Для всевозможных неравнобедренных треугольников параллелограмм $OPHQ$ является ромбом только при $\angle BAC = 60^\circ$ или $\angle BAC = 120^\circ$. В последнем случае точки A, P и Q также лежат на одной прямой.

Комментарий. Показано только, что в любом треугольнике $OPHQ$ — параллелограмм — 0 баллов.

Доказано, что $B'B_0 = C'C_0$ — 1 балл.

Не рассмотрена возможность раскрытия модулей с разными знаками (в геометрических терминах — не рассмотрен случай, когда одна из точек B', C' лежит внутри, а другая — вне отрезка от A до середины соответствующей стороны) — ставится не более 1 балла за всю задачу.

Из условия выведено, что $\angle BAC = 60^\circ$ — 4 балла.

10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров.

При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника? (*А. Магазинов*)

Ответ. $N = 102$.

Решение. Первое решение. Пусть $N \leqslant 101$. Распилим палку на $N-1$ палочки длиной 1 см и одну палочку длиной $201 - N$ см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной $201 - N \geqslant \geqslant 100$ см не может быть частью никакой стороны. Таким образом, $N \geqslant 102$.

Покажем, что при $N = 102$ искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше $2 \cdot 101 + 1 = 203$ см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ см, тогда имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = = 198$. Среди 100 чисел $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + + a_3, \ldots, A_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это A_k и A_ℓ, $k < \ell$. Число $A_\ell - A_k$ строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит, $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_\ell$.

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник 1×99 см.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что при $N = 102$ сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{102} = 200$. Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника T, вписанного в эту окружность. Вершины T разбиваются на пары противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D, причём суммарные длины в группах A и C, а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что $N \geqslant 102$ — 1 балл.

Доказано, что $N = 102$ подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.

11 класс

11.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{6}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $60a$, $630a$ и $24 \cdot 56a$ — целые. Значит, a — рациональное число, знаменатель q которого в несократимой записи является делителем чисел 60, 630 и $24 \cdot 56$. Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на q. Поскольку $\text{НОД}(60, 630) = 30$, а $24 \cdot 56$ не делится на 5, то q — делитель числа 6, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел $n+2$, $n+3$, $n+4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n+2$, $n+3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому $an(n+2)(n+3)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

11.6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$. (*П. Кожевников*)

Решение. Первое решение. Докажем, что точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Пусть O — центр окружности ω, а X — точка пересечения прямых BC и PL (см. рис. 3). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, достаточно доказать, что $OP \perp BC$.

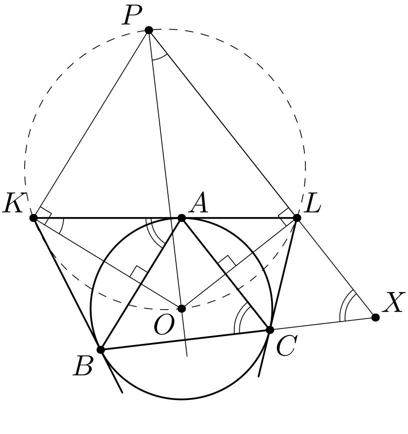

Рис. 3

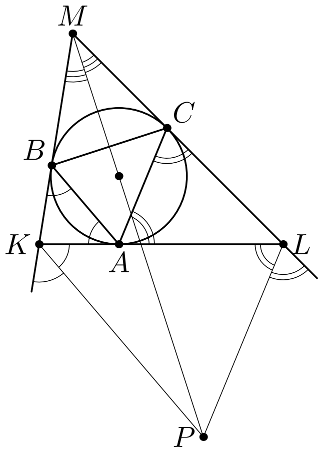

Рис. 4

Точки A и B симметричны относительно прямой OK, поэтому $OK \perp AB \parallel KP$. Аналогично $OL \perp LP$. Поскольку $\angle OKP = \angle OLP = 90^\circ$, четырехугольник $OKPL$ вписанный, откуда $\angle OPL = \angle OKL$. Из касания вытекает, что $\angle KAB = \angle ACB = \angle PXB$. Таким образом, $\angle OPX + \angle PXB = \angle OKL + \angle KAB = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть прямые BK и CL пересекаются в точке M (см. рис. 4). Поскольку треугольник ABK равнобедренный, имеем $\angle PKA = \angle BAK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AKB)$. Значит, KP — биссектриса внешнего угла при вершине K треугольника KLM. Аналогично, LP — биссектриса внешнего угла при вершине L. Тогда P — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны KL, поэтому P лежит на биссектрисе угла M. Поскольку $MB = MC$, точки B и C симметричны относительно этой биссектрисы. Значит, и отрезки PB и PC также симметричны и потому равны.

Комментарий. Доказано, что четырехугольник $OKPL$ вписанный — 2 балла.

11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 504.

Решение. Обозначим полученный правильный 2011-угольник через M, его вершины (по часовой стрелке) — через $X_1, X_2, \ldots, X_{2011}$, его вписанную окружность через ω, а его центр — через O. Назовём прямые, содержащие стороны многоугольника, *выделенными*.

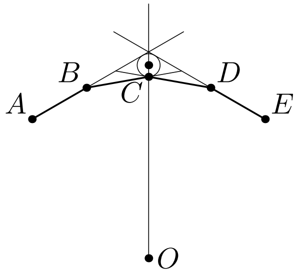

Рис. 5

Заметим, что для любых пяти последовательных вершин A, B, C, D, E многоугольника M существует окружность, отличная от ω, касающаяся прямых AB, BC, CD и DE (см. рис. 5). Действительно, вершины A и E, а также B и D симметричны относительно прямой CO. Тогда точка пересечения внешней биссектрисы угла ABC с прямой CO отлична от O и равноудалена от прямых AB, BC, CD и DE, а значит, является центром искомой окружности. Теперь, если Вася нарисует 503 такие окружности для точек $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, $(X_5, X_6, X_7, X_8, X_9)$, $\ldots$, $(X_{2009}, X_{2010}, X_{2011}, X_1, X_2)$, а также окружность ω, то любая выделенная прямая будет общей касательной к двум проведённым окружностям. Итак, 504 окружностей достаточно.

Осталось доказать, что окружностей должно быть не менее 504. Каждой выделенной прямой должны касаться хотя бы две окружности. Окружность ω касается всех 2011 этих прямых. У любой другой окружности есть не более четырёх общих касательных с ω; значит, она касается не более четырёх выделенных прямых. Итак, если окружностей n, то всего происходит не более, чем $2011 + 4(n-1)$ касаний окружности с выделенными прямыми; с другой стороны, их должно быть не меньше $2011 \cdot 2 = 4022$. Итак, $2011 + 4(n-1) \geqslant 2 \cdot 2011$, откуда $n \geqslant 2011/4 + 1 > 503$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что 504 окружностей достаточно — 2 балла.

Показано только, что 503 окружностей недостаточно — 4 балла.

11.8. Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geqslant$$
$$\geqslant (b^{2011}-c^{2011})(b^{2011}+c^{2011})(c^{2011}-b^{2011}).$$

(*В. Сендеров*)

Решение. Лемма. *Для любых вещественных $x \geqslant y \geqslant 0$ и натурального n верно неравенство*

$$x^n - y^n \geqslant (x-y)^n.$$

Доказательство. Пусть $x = y + t$, $t \geqslant 0$. Раскрывая $x^n = (y+t)^n$ по биному Ньютона, имеем $x^n = y^n + \ldots + t^n \geqslant y^n + t^n$, или $x^n - y^n \geqslant t^n$. Лемма доказана. $\square$

Без ограничения общности можно считать, что $b \geqslant c$. Обозначим $n = 2011$. Применим лемму к числам b, c, а также к числам b^2, c^2; мы получим

$$b^n - c^n \geqslant (b-c)^n,$$

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n) = (b^2)^n - (c^2)^n \geqslant (b^2 - c^2)^n = (b-c)^n(b+c)^n.$$

Перемножив полученные неравенства, получаем неравенство

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n)(b^n - c^n) \geqslant (b-c)^n(b+c)^n(b-c)^n.$$

Поскольку $b^n - c^n = -(c^n - b^n)$ и $(b-c)^n = -(c-b)^n$, полученное неравенство равносильно требуемому.