Материалы для проведения регионального этапа

XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2011–2012 учебный год

Первый день

27–28 января 2012 г.

Москва, 2011

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.А. Адуенко, А.В. Акопян, А.В. Антропов, Д.С. Бабичев, А.А. Баган, А.Я. Белов-Канель, Н.В. Богачёв, И.И. Богданов, В.А. Брагин, Р.А. Гимадеев, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, С.А. Дориченко, М.А. Евдокимов, Л.А. Емельянов, Г.М. Иванов, Ф.А. Ивлев, П.А. Кожевников, П.Ю. Козлов, М.А. Кунгожин, И.В. Макаров, Е.Г. Молчанов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, К.А. Праведников, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2011–2012 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 27 и 28 января 2012 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске? *(И. Богданов)*

Ответ. 3 числа.

Решение. Предположим, что чисел хотя бы четыре, и a — число с минимальным модулем. Из остальных чисел хотя бы два имеют один знак (оба неотрицательны или оба неположительны). Обозначим их b и c; тогда $bc = |bc| \geqslant |a|^2 = a^2$, что противоречит условию.

Осталось привести пример трёх чисел, удовлетворяющих условию. Подходят, например, числа $1, 2, -3$.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

Показано, что чисел на доске не больше трёх — 4 балла.

Приведён пример трёх чисел, удовлетворяющих условию задачи — 2 балла.

9.2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2.

(Л. Емельянов)

Решение. Пусть O_1, r_1 и O_2, r_2 — соответственно центры и радиусы окружностей ω_1 и ω_2, а K — точка пересечения ℓ_1 и ℓ_2. Заметим, что точка P лежит на отрезке O_1O_2 и делит его в отношении $r_1 : r_2$.

Обозначим через P_1 точку касания ℓ_2 и ω_1, а через P_2 точку касания ℓ_1 и ω_2. Прямоугольные треугольники KO_1P_1 и KO_2P_2 подобные по острому углу при вершине K. Значит, $\frac{KO_1}{KO_2} = \frac{O_1P_1}{O_2P_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Таким образом, в треугольнике KO_1O_2 точ-

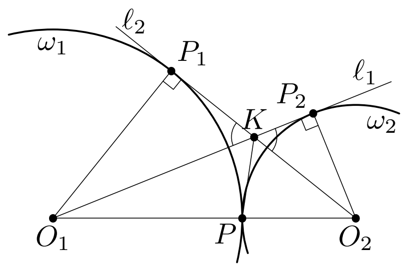

Рис. 1

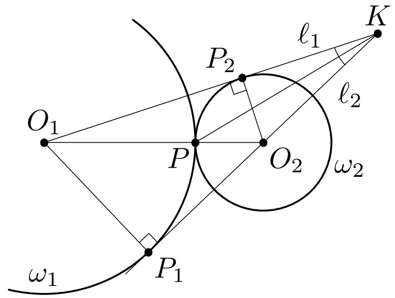

Рис. 2

ка P, лежащая на стороне O_1O_2, делит её в отношении, равном отношению прилежащих сторон KO_1 и KO_2. Из этого следует, что P — основание биссектрисы треугольника KO_1O_2.

Замечание. В задаче возможны два принципиально различных случая расположения точек и прямых. Они показаны на рис. 1 и рис. 2. Приведённое решение не зависит от случаев.

Комментарий. Если верно разобран один из этих двух случаев — 7 баллов.

9.3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.) *(С. Агаханов)*

Ответ. 0.

Решение. Из условия следует, что все сидящие за столом разбиваются на пары друзей; значит, рыцарей и лжецов поровну. Рассмотрим любую пару друзей. Если они сидят рядом, то рыцарь на заданный вопрос ответит «да», а лжец — «нет». Если же они не сидят рядом, то их ответы будут противоположными. В любом случае ровно один из пары друзей даст ответ «да». Значит, при любой рассадке все остальные 15 ответов будут «нет».

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$. *(А. Голованов)*

Решение. Предположим противное. Ясно, что тогда числа a и b натуральные. Действительно, если, скажем, $a < 0$, то, подставляя $m = 2|b|$, $n = 1$, получаем, что число $4ab^2 + b\cdot 1 = b(4ab + 1)$ должно быть квадратом некоторого числа x. С другой стороны, если $a < 0$, то числа b и $4ab + 1$ имеют разные знаки, так что $x^2 < 0$. Это невозможно.

Подставим теперь $m = 2b$, $n = 1$ и $m = 2b$, $n = 2$. Получим, что $4ab^2 + b = x^2$ и $4ab^2 + 4b = y^2$ при некоторых натуральных x, y. Ясно, что $y^2 > x^2 > 4b^2$, поэтому $y > x > 2b$. Но тогда $3b = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \geqslant 1\cdot 4b$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

Комментарий. Доказано только, что числа a и b неотрицательны — 1 балл.

10 класс

10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся. *(А. Голованов)*

Первое решение. Возьмем любые 5 из данных чисел: a, b, c, d, e. Если $abc > de$, то утверждение задачи верно. Если же $de \geqslant abc$, возьмем еще два числа f и g. Пусть скажем $f > g$. Тогда $def > abcg$; значит, и в этом случае утверждение задачи верно.

Второе решение. Упорядочим данные числа по убыванию: $a_1 > a_2 > \ldots > a_{10}$. Тогда $a_1a_2a_3 > a_4a_5a_6$. Если $a_6 \geqslant 1$, то $a_1a_2a_3 > a_4a_5$. Иначе $a_6 < 1$, откуда $a_7 < 1$, и, значит, $a_1a_2a_3 > > a_4a_5a_6 > a_4a_5a_6a_7$.

Замечание. Из второго решения видно, что $a_1a_2a_3$ больше либо произведения любых двух из оставшихся чисел, либо произведения любых четырех из оставшихся.

10.2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны. *(А. Акопян)*

Решение. Пусть K — точка пересечения отрезков AE и BF. Поскольку четырёхугольники $ABDF$ и $ACDE$ вписанные, мы имеем $\angle AFB = \angle ADB$ и $\angle ADC = \angle AEC$. Отсюда и из условия задачи получаем $\angle AKB = \angle AFB + \angle FAE = = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC = = \angle AEC$. Итак, $\angle AKB = \angle AEC$. Это и значит, что $BF \parallel CE$.

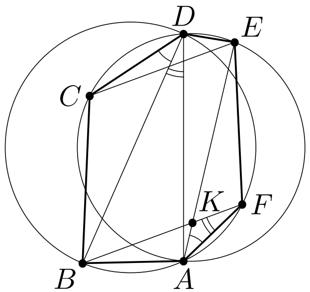

Рис. 3

10.3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа. *(М. Мурашкин)*

Первое решение. Число $a_3 = 5 \cdot 72 = 360$ целое. При $n \geqslant 4$ будут верны равенства

$$a_n = 5 \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n-1} = 5 \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-2}}{n-2},$$

откуда следует, что

$$a_n = \frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5}\,a_{n-1} + a_{n-1}\right) = \frac{n+3}{n-1}\,a_{n-1}.$$

Значит, если $n \geqslant 4$, то число

$$a_n = \frac{(n+3)(n+2)\cdot\ldots\cdot 7}{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 360 = = (n+3)(n+2)(n+1)n$$

является целым, что и требовалось доказать.

Второе решение. Положим $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, тогда $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Для решения задачи достаточно показать, все что числа S_n — целые. Из условия имеем $S_1 = 1$, $S_2 = 144$, а формула $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ принимает вид $S_{n+1} - S_n = \frac{5S_n}{n}$, откуда $S_{n+1} = \frac{n+5}{n}\,S_n$. Значит, при $n \geqslant 2$ получаем

$$S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)\cdot\ldots\cdot 7}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}\,S_2 = = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot 144 = = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}.$$

Так как хотя бы одно из чисел $n+5, n+4, n+3, n+2, n+1$ делится на 5, то при $n \geqslant 2$ число S_{n+1} — целое.

Комментарий. Получено рекуррентное соотношение $a_{n+1} = \frac{n+4}{n}\,a_n$, либо $S_{n+1} = \frac{n+5}{n}\,S_n$ — 4 балла.

Получена явная формула для S_n в замкнутой форме (то есть $S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}$) — не менее 6 баллов.

10.4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число).

Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний. (*В. Шмаров*)

Ответ. 1.

Первое решение. Индукцией по N докажем, что чётных паросочетаний на 1 больше, чем нечётных. Для $N = 1$ утверждение очевидно: есть лишь одно паросочетание, и оно чётно. Теперь докажем утверждение для $2N$ точек, предполагая, что оно верно для $2(N-1)$ точек. Обозначим отмеченные точки $A_1, A_2, \ldots, A_{2N}$ в порядке обхода окружности по часовой стрелке.

Лемма. *Пусть в паросочетании участвует хорда A_1A_i. Тогда при чётном i она пересекает чётное число хорд, а при нечётном i — нечётное.*

Доказательство. Пусть хорду A_1A_i пересекают ровно k хорд. Рассмотрим точки $A_2, \ldots, A_{i-1}$; ровно k из них являются концами хорд, пересекающих A_1A_i (по одному концу каждой хорды). Остальные $i-2-k$ точек разбиваются на пары точек, соединенных хордами, которые не пересекают A_1A_i. Таким образом, число $i-2-k$ чётно, то есть числа i и k имеют одинаковую чётность. Лемма доказана. □

Разобьём теперь все паросочетания на $2N-1$ группу $\Pi_2, \ldots, \Pi_{2N}$: в группу Π_i попадут те паросочетания, в которых точка A_1 соединена с A_i. Теперь выкинем из каждого паросочетания из Π_i хорду A_1A_i; получатся все возможные паросочетания на оставшихся $2N-2$ точках. По предположению индукции, среди них чётных на одно больше, чем нечётных. При этом, если i чётно, то согласно лемме чётность паросочетания при выкидывании не менялась, а если i нечётно, то менялась. Значит, в каждом из N множеств $\Pi_2, \ldots, \Pi_{2N}$ чётных паросочетаний на одно больше, чем нечётных, а в каждом из $N-1$

множеств $\Pi_3, \ldots, \Pi_{2N-1}$ нечётных на одно больше, чем чётных. Итого, всего чётных паросочетаний больше, чем нечётных, на $N - (N-1) = 1$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Приведём другое доказательство шага индукции.

Пусть отмеченные точки — $A_1, \ldots, A_{2N}$. Рассмотрим все паросочетания, в которых A_{2N-1} и A_{2N} соединены хордой. Эта хорда не пересекается ни с одной другой. Значит, выбросив её из каждого из рассматриваемых паросочетаний, мы получим все паросочетания на точках $A_1, \ldots, A_{2N-2}$, причём чётность каждого из них сохранится. По предположению индукции, среди наших паросочетаний чётных на одно больше, чем нечётных.

Для завершения доказательства достаточно показать, что среди всех остальных паросочетаний поровну чётных и нечётных. Рассмотрим любое из них; пусть в нём есть хорды $A_{2N-1}A_i$ и $A_{2N}A_k$. Теперь «поменяем местами» точки A_{2N-1} и A_{2N}, то есть заменим наши хорды на $A_{2N}A_i$ и $A_{2N-1}A_k$. При этом, если исходная хорда пересекалась с какой-то из остальных, то и новая хорда будет с ней пересекаться. С другой стороны, если хорды $A_{2N-1}A_i$ и $A_{2N}A_k$ не пересекались, то новые хорды будут пересекаться, и наоборот. Итак, каждому оставшемуся чётному паросочетанию мы сопоставили нечётное, и наоборот; при этом разным паросочетаниям, очевидно, соответствуют разные. Значит, оставшихся чётных и нечётных паросочетаний поровну, что и требовалось доказать.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

11 класс

11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.

(*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть a — один из членов прогрессии, а d — её разность. По условию, числа $a(a+d)$ и $a(a+2d)$ — также члены прогрессии; значит, их разность имеет вид nd при некотором целом n, то есть $a(a+2d) - a(a+d) = nd$, или $ad = nd$. Поскольку $d > 0$, получаем $a = n$, то есть a — целое число. В силу произвольности выбора члена прогрессии, задача решена.

Комментарий. Верно разобран лишь случай, когда все члены прогрессии рациональны — 1 балл.

Доказано только, что первый член прогрессии целый — 4 балла.

11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть P — точка пересечения данных прямых. Поскольку $PA \parallel SC$ и $PC \parallel SA$, точка P лежит в плоскости SAC, а четырёхугольник $ASCP$ — параллелограмм. Значит, прямая SP делит отрезок AC пополам. Аналогично, прямая SP делит отрезок BD пополам. Значит, прямая SP пересекает плоскость основания пирамиды в точке пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, и диагонали делятся этой точкой пополам. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

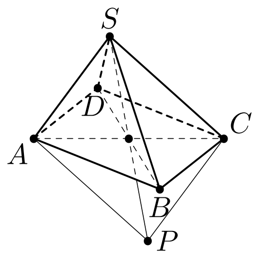

Рис. 4

11.3. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы

$$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \ldots, \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$

также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$.

(*В. Сендеров*)

Решение. Отложим векторы $2\vec{a}_1, \ldots, 2\vec{a}_n$ из одной точки: пусть $\overrightarrow{OA_i} = 2\vec{a}_i$. Тогда все точки $A_1, \ldots, A_n$ различны и лежат на окружности ω с центром O.

Пусть $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$. Рассмотрим точку S такую, что $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$; по условию, все векторы $\vec{s} - 2\vec{a}_i$ имеют одну и ту же длину r. Поскольку $\overrightarrow{SA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OS} = 2\vec{a}_i - \vec{s}$, это означает, что все точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на окружности Ω с центром S и радиусом r.

Итак, окружности ω и Ω имеют $n > 2$ общих точек. Это значит, что они совпадают, а тогда и их центры совпадают, то есть $\vec{s} = \vec{0}$. Это и требовалось доказать.

11.4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.) (*К. Чувилин*)

Ответ. Могло.

Решение. Обозначим первый ответ на каждый вопрос через нуль, а второй — через единицу. Тогда каждому набору ответов соответствует набор из шести нулей и единиц. Аудиторию будем представлять в виде таблицы 8×8, в клетки которой расставляются наборы из шести цифр. Нам требуется заполнить таблицу так, чтобы соседние по вертикали или горизонтали наборы совпадали не более чем по одной цифре. Чётностью набора будем называть чётность суммы его цифр.

Покажем сначала, как заполнить клетки так, чтобы соседние наборы *различались* ровно по одной цифре. Пусть в наборах любой строки последние три цифры одинаковы, а первые три определяются слева направо так: 000, 001, 011, 010, 110, 100, 101, 111. Тогда любые два соседние по горизонтали набора различаются ровно по одной цифре. В каждом столбце последние три цифры определим таким же образом сверху вниз. Аналогично получится, что любые два соседние по вертикали набора различаются ровно по одной цифре. Остается заметить, что все наборы различны, поскольку наборы из разных столбцов отличаются в первых трёх цифрах, а из разных строк — во вторых трёх.

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010

Рис. 5

Покрасим теперь все клетки таблицы в белый и чёрный цвета в шахматном порядке так, чтобы левая верхняя клетка была белой. Тогда все чётные наборы попадут в белые клетки, а все нечётные — в чёрные. В каждом наборе в чёрных клетках заменим единицы на нули, а нули — на единицы. Заметим, что при таком обращении чётность набора не изменится, поэтому по-прежнему во всех белых клетках будут чётные наборы, а во всех чёрных — нечётные. При этом все нечётные наборы будут попарно различаться (в противном случае какие-то два набора совпадали бы до обращения), аналогично все чётные будут попарно различаться. Значит, и все наборы будут различны. Наконец, любые две соседние клетки имеют разные цвета, и, поскольку до обращения наборы в них различались ровно по одной цифре, после обращения наборы будут совпадать ровно по одной цифре.

На рис. 5 показан пример аналогичной расстановки для квадрата 4×4.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Правильный пример без обоснования или с неверным обоснованием — 3 балла.

Материалы для проведения регионального этапа

XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2011–2012 учебный год

Второй день

27–28 января 2012 г.

Москва, 2011

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.А. Адуенко, А.В. Акопян, А.В. Антропов, Д.С. Бабичев, А.А. Баган, А.Я. Белов-Канель, Н.В. Богачёв, И.И. Богданов, В.А. Брагин, Р.А. Гимадеев, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, С.А. Дориченко, М.А. Евдокимов, Л.А. Емельянов, Г.М. Иванов, Ф.А. Ивлев, П.А. Кожевников, П.Ю. Козлов, М.А. Кунгожин, И.В. Макаров, Е.Г. Молчанов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, К.А. Праведников, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2011–2012 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 27 и 28 января 2012 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался? (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть Фокусник после первого действия не тасует карты, а собирает их, не нарушая порядок в столбцах, и складывает в колоду один столбец за другим. Второй раз он выкладывает карты построчно, т.е. бывшие столбцы становятся строками (это нетрудно сделать, выкладывая ту же колоду по горизонтали). После ответа Зрителя, Фокусник знает номер строки и столбца в первой раскладке, содержащих загаданную карту, что и позволяем ему назвать её.

Замечание. Приведённый алгоритм — не единственный возможный.

Комментарий. Верный алгоритм без обоснования или с неверным обоснованием — 4 балла.

9.6. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$. (*И. Богданов*)

Решение. Заметим, что $2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a^3 - b^3) = (a^5 - b^5) + a^2b^2(a - b) \geqslant 4 + a^2b^2(a - b)$. Поскольку $a^3 > b^3$, мы имеем $a > b$, а значит, $a^2b^2(a - b) \geqslant 0$. Итак, $2(a^2 + b^2) \geqslant 4$, откуда и следует утверждение задачи.

9.7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно. *(Т. Емельянова)*

Решение. Пусть M — середина отрезка EF, B_0 — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Можно считать, что точка D лежит на отрезке AB_0. Точки A_0 и C_0 симметричны точке B_0 относительно биссектрис углов C и A соответственно. Следовательно, точка E лежит на отрезке AC_0, а точка F — на продолжении отрезка CA_0, и $EC_0 = DB_0 = FA_0$.

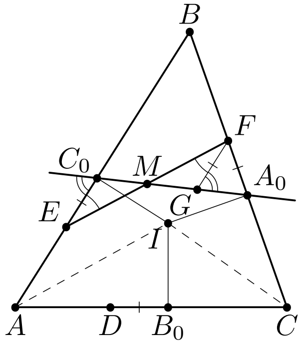

Рис. 1

Отметим на прямой A_0C_0 точку G так, чтобы отрезки FG и AB были параллельны. Тогда треугольники FGA_0 и BC_0A_0 подобны; поскольку $BC_0 = BA_0$, получаем $FG = FA_0 = EC_0$. Далее, из параллельности имеем $\angle FEC_0 = \angle EFG$ и $\angle EC_0G = \angle FGC_0$. Значит, треугольники EC_0M и FGM равны по стороне и двум углам, и $EM = MF$.

Комментарий. Доказано только, что точки E и F лежат на прямых AB и BC соответственно — 0 баллов.

Доказано, что $C_0E = A_0F$ — 2 балла.

9.8. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами? *(Б. Трушин)*

Ответ. При всех n, кратных трём.

Решение. Предположим, что нам удалось перекрасить клетки так, как требуют условия задачи. Будем называть клетками первого типа те, которые первоначально были белыми, а второго типа — те, которые были чёрными. Заметим, что если

какую-то клетку перекрасили три раза, то в итоге она свой цвет не поменяла. Поэтому для того, чтобы клетка первого типа стала чёрной, её нужно перекрасить $3k + 1$ раз при некотором целом k (для разных клеток k может быть разным). Значит, если a — количество клеток первого типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3K + a$ при некотором целом K. Чтобы клетка второго типа стала белой, её нужно перекрасить $3m+2$ раза. Значит, если b — количество клеток второго типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3M + 2b$ раз.

Далее, в любом квадрате 2×2 клеток первого и второго типа поровну. Поэтому, как бы мы не перекрашивали, суммарно клетки первого и второго типов будут перекрашены одинаковое число раз. Поэтому $3K+a = 3M+2b$, откуда $a+b = 3(M-K+b)$, то есть общее количество клеток $a + b$ делится на три. Значит n^2 кратно трем, а поэтому и n кратно трем.

Осталось показать, как можно перекрасить квадрат со стороной, кратной трем. Разрежем его на квадраты 3×3. Рассмотрим один из таких квадратов. Есть два случая — либо угловые клетки белые, либо чёрные. В первом случае перекрашиваем каждый из четырех квадратов, примыкающих к углам по одному разу, а во втором случае — по два раза. Легко проверить, что при таком перекрашивании шахматная раскраска поменяется на противоположную.

Замечание. В доказательстве того, что n делится на 3, можно рассматривать не все n^2 клеток, а n клеток в одном горизонтальном или вертикальном ряду, скажем, n клеток, примыкающие к нижней стороне.

Комментарий. Доказано, что n должно делиться на 3 — 4 балла.

Приведен пример, показывающий, что при n, делящемся на 3, условие задачи выполнимо — 2 балла.

Рассмотрены лишь несколько небольших значений n — 0 баллов.

10 класс

10.5. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Петей, оказаться различными? *(Н. Агаханов, П. Кожевников)*

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим противное; тогда все углы пятиугольника — различные числа из интервала $(0, \pi)$. Заметим сразу, что тогда у Пети не найдётся трёх равных чисел, ибо в этом интервале нет трёх различных углов с равными синусами.

Значит, у Пети должны быть две пары равных чисел: $\sin\alpha = \sin\beta$ и $\sin\gamma = \sin\delta$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, мы получаем $\alpha = \pi - \beta$; аналогично $\gamma = \pi - \delta$.

Пусть теперь ε — пятый угол пятиугольника. Поскольку сумма углов пятиугольника равна 3π, имеем $\varepsilon = 3\pi - (\alpha+\beta) - (\gamma+\delta) = 3\pi - \pi - \pi = \pi$. Это невозможно, так как $\varepsilon < \pi$.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

Верно разобран лишь случай, когда три синуса равны — 2 балла.

Верно разобран лишь случай, когда есть две пары равных синусов — 4 балла.

10.6. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1 + a$, $1 + a^2$, $1 + a^3$, $\ldots$, $1 + a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске? *(О. Подлипский)*

Ответ. 4 числа.

Решение. Покажем сначала, что искомых чисел не может быть более четырех. Заметим, что если k — нечётное, то число $1 + a^{nk} = 1^k + (a^n)^k$ делится на $1 + a^n$. Далее, каждое из чисел $1, 2, \ldots, 15$ имеет один из видов $k, 2k, 4k, 8k$, где k нечётно. Таким образом, каждое из чисел $1 + a$, $1 + a^2$, $1 + a^3$, $\ldots$, $1 + a^{15}$ делится либо на $1 + a$, либо на $1 + a^2$, либо на $1 + a^4$, либо на $1 + a^8$. Поэтому, если мы возьмем хотя бы пять чисел, то среди них найдутся два, делящиеся на одно и то же число, большее 1; значит, они не будут взаимно просты. Итак, оставшихся чисел не более четырех.

Осталось показать, что четыре числа могли остаться. Действительно, если $a = 2$, то можно оставить числа $1 + 2 = 3$, $1 + 2^2 = 5$, $1 + 2^4 = 17$ и $1 + 2^8 = 257$. Все они попарно взаимно просты.

Замечание. Можно показать, что при любом чётном a числа $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^4, 1 + a^8$ буду попарно взаимно просты.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

Доказано, что на доске не могло остаться больше четырёх чисел — 5 баллов.

Показано, что на доске могли остаться четыре числа — 2 балла.

10.7. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами? *(Б. Трушин)*

Ответ. При всех n, кратных трём.

Решение. Предположим, что нам удалось перекрасить клетки так, как требуют условия задачи. Будем называть клетками первого типа те, которые первоначально были белыми, а второго типа — те, которые были чёрными. Заметим, что если какую-то клетку перекрасили три раза, то в итоге она свой цвет не поменяла. Поэтому для того, чтобы клетка первого типа стала чёрной, её нужно перекрасить $3k + 1$ раз при некотором целом k (для разных клеток k может быть разным). Значит, если a — количество клеток первого типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3K+a$ при некотором целом K. Чтобы клетка второго типа стала белой, её нужно перекрасить $3m+2$ раза. Значит, если b — количество клеток второго типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3M+2b$ раз.

Далее, в любом квадрате 2×2 клеток первого и второго типа поровну. Поэтому, как бы мы не перекрашивали, суммарно клетки первого и второго типов будут перекрашены одинаковое число раз. Поэтому $3K+a=3M+2b$, откуда $a+b=3(M-K+b)$, то есть общее количество клеток $a+b$ делится на три. Значит n^2 кратно трем, а поэтому и n кратно трем.

Осталось показать, как можно перекрасить квадрат со стороной, кратной трем. Разрежем его на квадраты 3×3. Рассмотрим один из таких квадратов. Есть два случая — либо угловые клетки белые, либо чёрные. В первом случае перекрашиваем каждый из четырех квадратов, примыкающих к углам по одному разу, а во втором случае — по два раза. Легко проверить, что при таком перекрашивании шахматная раскраска поменяется на противоположную.

Замечание. В доказательстве того, что n делится на 3, можно рассматривать не все n^2 клеток, а n клеток в одном горизонтальном или вертикальном ряду, скажем, n клеток, примыкающие к нижней стороне.

Комментарий. Доказано, что n должно делиться на 3 — 4 балла.

Приведен пример, показывающий, что при n, делящемся на 3, условие задачи выполнимо — 2 балла.

Рассмотрены лишь несколько небольших значений n — 0 баллов.

10.8. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC=\angle ASD$.

(*В. Шмаров*)

Решение. Так как SO — диаметр, то $\angle SCA=\angle SCO=\angle SDO=\angle SDB=90^\circ$. Для решения достаточно доказать по-

добие прямоугольных треугольников SCA и SDB. Действительно, из подобия будет следовать равенство углов $\angle CSA=\angle DSB$, откуда $\angle BSC=\angle CSA-\angle ASB=\angle DSB-\angle ASB=\angle ASD$.

Итак, достаточно показать, что $\frac{AC}{BD}=\frac{SC}{SD}$. Из прямоугольных треугольников ADC и BCD имеем $\frac{AC}{BD}=\frac{CD}{\cos\angle OCD}:\frac{CD}{\cos\angle ODC}=\frac{\cos\angle ODC}{\cos\angle OCD}$. Так как $\angle OCD=90^\circ-\angle SCD$, то $\cos\angle OCD=\sin\angle SCD$. Аналогично $\cos\angle ODC=\angle\sin SDC$. Отсюда $\frac{AC}{BD}=\frac{\sin\angle SDC}{\sin\angle SCD}=\frac{SC}{SD}$ (последнее равенство следует из теоремы синусов), откуда и следует требуемое подобие.

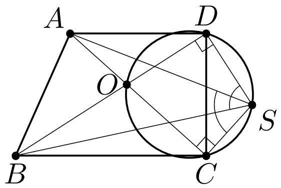

Рис. 2

Комментарий. Найдены прямые углы $\angle SCO=\angle SDO$ — 0 баллов.

Задача сведена к подобию прямоугольных треугольников SCA и SDB — 3 балла.

Доказано подобие прямоугольных треугольников SCA и SDB — не менее 5 баллов.

11 класс

11.5. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}$. *(В. Сендеров)*

Решение. При $n = 1$ неравенство верно, ибо $0 < 1$. Пусть $n > 1$. Заметим, что $0 < n-1 < n+1$, поэтому
$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < (n-1)^n(n+1)^n = (n^2-1)^n < (n^2)^n = n^{2n},$$
что и требовалось доказать.

Комментарий. Только разбор конкретных значений n — 0 баллов.

11.6. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы — ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$? *(Н. Агаханов)*

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что $m \neq n$. Всего в турнире с участием 73 команд проводится $\frac{73 \cdot 72}{2} = 36 \cdot 73$ игр. Пусть x команд одержали по n побед, а остальные $73 - x$ команд — по m побед. Тогда получаем равенство $x \cdot n + (73 - x) \cdot m = 36 \cdot 73$, откуда $x \cdot (n - m) = (36 - m) \cdot 73$. Число 73 — простое, поэтому на него делится либо множитель x, либо множитель $n - m$. Первое невозможно, так как $x < 73$. А второе невозможно, так как $n < 73, m < 73$, следовательно, $0 < |n - m| < 73$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

11.7. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки. *(И. Богданов)*

Решение. Пусть для определённости $a > b$.

Если (x_0, y_0) — одна из точек пересечения, то $\sin ax_0 - \sin bx_0 = 0$, или
$$\sin \frac{a-b}{2} x_0 \cdot \cos \frac{a+b}{2} x_0 = 0.$$

Значит, $\frac{a-b}{2} x_0 = k\pi$ или $(a+b)x_0 = (2k+1)\pi$ при некотором целом k, откуда следует, что одно из чисел $\frac{a-b}{2\pi} x_0$ или $\frac{a+b}{\pi} x_0$ целое.

Подберём теперь число c такое, чтобы во всех таких точках число $\frac{a-c}{2\pi} x_0$ также было целым; тогда в этих точках мы будем иметь
$$\sin \frac{a-c}{2} x_0 \cdot \cos \frac{a+c}{2} x_0 = 0,$$
или $\sin cx_0 = \sin ax_0 = y_0$, что и требуется.

Для этого достаточно положить, например, $c = 2(a^2-b^2)+a$. Действительно, тогда число $\frac{a-c}{2\pi} x_0 = (b-a) \cdot \frac{b+a}{\pi} x_0 = 2(b+a) \cdot \frac{b-a}{2\pi} x_0$ в целое число раз больше каждого из чисел $\frac{a-b}{2\pi} x_0$ и $\frac{a+b}{\pi} x_0$, то есть является целым. Кроме того, $c > a > b$. Это и означает, что c удовлетворяет требованиям.

11.8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ$. *(И. Богданов, К. Кноп)*

Первое решение. Обозначим через $f(ABCD)$ сумму четырёх углов в условии. Заметим, что если четырёхугольник $ABCD$ вписан, то утверждение верно. Действительно, тогда $f(ABCD) = (\angle BAC + \angle CAD) + (\angle DCA + \angle ACB) = \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

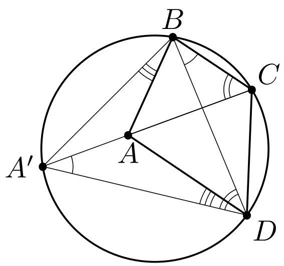

Рис. 3

Пусть теперь четырёхугольник не вписан. Тогда описанная окружность треугольника BCD пересекает прямую AC вторично в точке $A' \neq A$. Заметим, что $f(A'BCD) - f(ABCD) = (\angle BA'C - \angle BAC) + (\angle A'DB - \angle ADB) = \pm(\angle ABA' - \angle ADA')$, где знак перед последней скобкой зависит от порядка точек A, A' на прямой AC. Поскольку $f(A'BCD) = 180^\circ$, нам достаточно доказать, что $\angle ABA' = \angle ADA'$.

По условию, мы имеем $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = k$. Пусть радиус описанной окружности четырёхугольника $A'BCD$ равен R. Тогда по теореме синусов $2R = \dfrac{BC}{\sin BA'C} = \dfrac{CD}{\sin CA'D}$; умножая последнее равенство на k, получаем $\dfrac{AB}{\sin AA'B} = \dfrac{AD}{\sin AA'D}$. Применяя теорему синусов к треугольникам ABA' и ADA', получаем $\dfrac{AA'}{\sin ABA'} = \dfrac{AB}{\sin AA'B} = \dfrac{AD}{\sin AA'D} = \dfrac{AA'}{\sin ADA'}$. Итак, $\sin ABA' = \sin ADA'$, то есть либо углы $\angle ABA'$ и $\angle ADA'$ равны, либо их сумма равна 180°. Наконец, второй случай невозможен; действительно, сумма углов невыпуклого четырёхугольника $ABA'D$ равна 360°, поэтому $\angle ABA' + \angle ADA' < 180^\circ$.

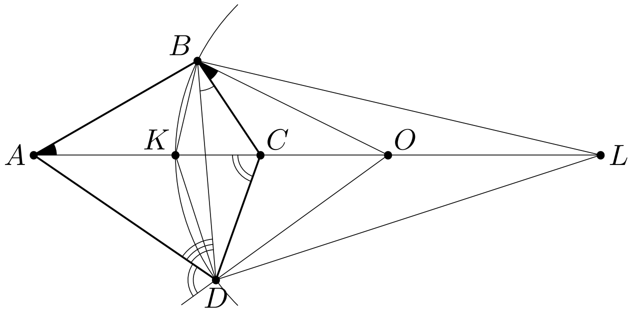

Рис. 4

Второе решение. Из условия следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Если эти отношения равны 1, то треугольники ABC и ADC равнобедренные, и четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD; значит, $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = \angle BAC + \angle ABD + \angle DAC + \angle ADB = \angle ABD + \angle ADB + \angle DAB = 180^\circ$, что и требовалось.

Пусть теперь, для определённости, $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} > 1$. Пусть BK и BL — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ABC (см. рис. 4). Тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$; значит, DK и DL — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ADC. Отсюда следует, что $\angle KBL = \angle KDL = 90^\circ$, и четырёхугольник $BKDL$ вписан в окружность с центром в точке O — середине отрезка KL.

Из равнобедренного треугольника OKB получаем $\angle OBK = \angle OKB = \angle ABK + \angle KAB = \angle CBK + \angle CAB$, откуда

$\angle CAB = \angle OBK - \angle CBK = \angle OBC$. Значит, $\angle CAB + \angle CBD = \angle OBC + \angle CBD = \angle OBD$. Аналогично, из равнобедренного треугольника ODK получаем $\angle ODA = \angle ODK + \angle KDA = \angle OKD + \angle CDK = 180^\circ - \angle DCK$, откуда $\angle DCA + \angle ADB = (180^\circ - \angle ODA) + \angle ADB = 180^\circ - \angle ODB$.

Итак, сумма всех четырёх углов в условии равна $\angle OBD + 180^\circ - \angle ODB = 180^\circ$, поскольку треугольник OBD равнобедренный. Это и требовалось доказать.

Комментарий. Замечено, что для вписанного четырёхугольника указанная сумма углов равна 180° — 1 балл.