Материалы для проведения регионального этапа

XL ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2013–2014 учебный год

Первый день

4–5 февраля 2014 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Антропов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.И. Голованов, А.Ю. Головко, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Д.Д. Карпушкин, П.А. Кожевников, Д.Н. Крачун, А.Д. Матушкин, Е.Г. Молчанов, О.С. Нечаева, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, Р.С. Садыков, В.А. Сендеров, М.Б. Скопенков, К.А. Сухов, Д.А. Терёшин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, А.С. Циглер, В.З. Шарич.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013–2014 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 4 и 5 февраля 2014 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

В связи со значительным различием во времени между восточными и западными регионами страны, с 2013-2014 учебного года предусмотрено изменение времени начала туров регионального этапа в соответствии с часовыми поясами; время начала туров указано в таблице ниже.

Разница с московским временем	Начало туров (по местному времени)
-1 час или 0 часов	10 часов
$+1$ час или $+2$ часа	11 часов
$+3$ часа или $+4$ часа	12 часов
$+5$ часов	13 часов
$+6$ часов	14 часов
$+7$ часов или $+8$ часов	15 часов

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. По кругу расставлены 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть такое могло оказаться. Обозначим данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1111}$ и обозначим их сумму через S. По условию, для каждого номера k числа a_k и $S - a_k$ оканчиваются одной и той же цифрой. Отсюда следует, что разность этих чисел, равная $S - 2a_k$, делится на 10. Значит, при любом k число $2a_k$ оканчивается последней цифрой суммы S. Это означает, что разность между любыми двумя числами a_k делится на 5. Итак, все 111 различных чисел a_i должны давать одинаковые остатки от деления на 5; но среди чисел от 1 до 500 ровно по 100 чисел, дающих фиксированный остаток от деления на 5. Противоречие.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

Доказано, что все числа a_k имеют один и тот же остаток от деления на 5 — 4 балла.

9.2. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$. (*Л. Емельянов*)

Первое решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD (см. рис. 1). Биссектрисы углов ADB и DAC пересекаются в центре O_1 окружности, вписанной в треугольник AOD, а биссектрисы углов ACB и DBC — в центре O_2 окружности, вписанной в треугольник BOC. Значит, точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисах вертикальных углов AOD и BOC, то есть точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

Рассмотрим ромб PO_1QO_2 из условия задачи. В нём имеем $\angle PO_1O_2 = \angle PO_2O_1$. Но $\angle PO_2O_1$ — это внешний угол для треугольника OO_2C; поэтому $\angle PO_2O_1 = \angle PCO + \angle O_2OC = (\angle ACB + \angle BOC)/2$. Аналогично, $\angle PO_1O_2 = \angle PO_1O = \angle PDO + \angle O_1OD = (\angle BDA + \angle AOD)/2$. Значит, $\angle BDA = \angle ACB = \angle CAD$. Таким образом, треугольник AOD равнобедренный ($AO = OD$) и, аналогично, $BO = OC$. Отсюда треугольники AOB и COD равны, и $AB = CD$.

Второе решение. Обозначим вершины ромба через P, O_1, Q, O_2, как и в первом решении. Поскольку четырёхугольник PO_1QO_2 — ромб, расстояние между прямыми O_2P и O_1Q равно расстоянию между прямыми O_1P и O_2Q, то есть

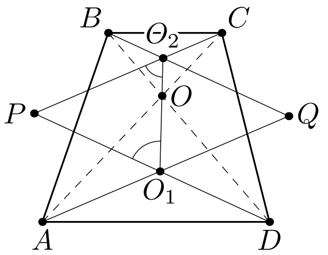

Рис. 1

$$AC \sin(\angle CAD/2) = BD \sin(\angle BDA/2).$$

Так как вершины B и C равноудалены от прямой AD, имеем

$$AC \sin \angle CAD = BD \sin \angle BDA.$$

Деля второе полученное равенство на первое и используя тождество $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$, получаем

$$\cos(\angle CAD/2) = \cos(\angle BDA/2).$$

Так как оба угла CAD и BDA меньше $180°$, получаем, что $\angle CAD = \angle BDA$. Как и в первом решении, заключаем, что $AB = CD$.

Замечание. Из решения следует, что $ABCD$ — равнобокая трапеция или прямоугольник.

Комментарий. Замечено лишь, что для равнобокой трапеции условие задачи выполнено — 0 баллов.

Доказано, что точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой — 2 балла.

9.3. Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N? (*О. Дмитриев*)

Ответ. 14.

Решение. Число N может равняться 14, как показывает, например, четвёрка чисел 4, 15, 70, 84. Осталось показать, что $N \geqslant 14$.

Лемма. *Среди попарных НОД четырёх чисел не может быть ровно двух чисел, делящихся на некоторое натуральное k.*

Доказательство. Если среди исходных четырёх чисел есть не больше двух чисел, делящихся на k, то среди попарных НОД на k делится не более одного. Если же три из исходных чисел делятся на k, то все три их попарных НОД делятся на k. Лемма доказана. □

Применяя лемму к $k = 2$, получаем, что число N чётно. Применяя её же к $k = 3$, $k = 4$ и $k = 5$, получаем, что N не делится на 3, 4 и 5. Значит, N не может равняться 6, 8, 10 и 12.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ и пример, в котором $N = 14$ — 2 балла.

Доказано лишь, что $N \leqslant 14$ — 4 балла.

Если этого не доказано, но доказано, что N чётно — 2 балла (эти баллы могут суммироваться с баллами за ответ).

9.4. Все клетки квадратной таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает k клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну еще не закрашенную клетку с номером a, если для неё выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим, чем a; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим, чем a. При каком наименьшем k независимо от исходной нумерации Петя за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы? (*С. Берлов*)

Ответ. $k = 1$.

Решение. Докажем вначале следующее утверждение.

Лемма. *Для любых двух клеток A и B существует такая клетка C, закрасив которую, можно затем закрасить и A, и B (возможно, C совпадает с A или с B.)*

Доказательство. Можно считать, что номер a клетки A

меньше, чем номер b клетки B. Пусть D — клетка в одном столбце с A и в одной строке с B, и пусть d — её номер (возможно, $D = A$ или $D = B$). Тогда, если $d < a$, то после закрашивания A можно последовательно закрасить D и B; если $a \leqslant d \leqslant b$, то после закрашивания D можно закрасить как A, так и B; наконец, если $d > b$, то после закрашивания B можно последовательно закрасить D и A. Итак, в любом случае в качестве C можно выбрать одну из клеток A, B и D. Лемма доказана. $\square$

Перейдём к решению задачи. Ясно, что $k \geqslant 1$; значит, достаточно доказать, что при $k = 1$ закраска всегда возможна.

Зафиксируем произвольную нумерацию клеток. Рассмотрим все способы закрашивания клеток согласно условию (при $k = 1$) и выберем из них тот, в котором количество закрашенных клеток максимально. Пусть в этом способе первая закрашенная клетка — A. Предположим, что при этом способе какая-то клетка B осталась незакрашенной. Тогда, выбрав по Лемме соответствующую клетку C и начав закрашивание с неё, мы потом сможем закрасить B, A, и, как следствие, все клетки, закрашенные в выбранном способе. Значит, всего мы закрасим хотя бы на одну клетку больше. Противоречие с выбором способа показывает, что на самом деле в нашем способе будут закрашены все клетки. Это и означает, что $k = 1$ подходит.

10 класс

10.1. Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них — 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз. (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Решение. Допустим противное. Тогда каждую из оценок 2, 3, 4, 5 ученик получил не меньше трёх раз. Возьмём по три оценки каждого вида; сумма 12 взятых оценок равна 42. Так как каждая из оставшихся пяти оценок не меньше 2 и не больше 5, сумма всех 17 оценок не меньше $42 + 5 \cdot 2 = 52$ и не больше $42 + 5 \cdot 5 = 67$. Но ни одно из чисел от 52 до 67 не делится на 17, поскольку $3 \cdot 17 = 51$ и $4 \cdot 17 = 68$. Значит, среднее арифметическое всех оценок — нецелое. Противоречие.

10.2. Стозначное число n назовём *необычным*, если десятичная запись числа n^3 заканчивается на n, а десятичная запись числа n^2 не заканчивается на n. Докажите, что существует не менее двух стозначных необычных чисел. (*В. Сендеров*)

Решение. Например, такими числами являются $n_1 = 10^{100} - 1 = 99\ldots9$ и $n_2 = \frac{10^{100}}{2} - 1 = 49\ldots9$. Действительно, числа $n_1^3 - n_1 = (n_1 + 1)n_1(n_1 - 1) = 10^{100} \cdot n_1(n_1 - 1)$ и $n_2^3 - n_2 = (n_2 + 1)n_2(n_2 - 1) = 10^{100} \cdot n_2 \cdot \frac{n_2 - 1}{2}$ делятся на 10^{100}; это означает, что n_i^3 оканчивается на n_i. С другой стороны, числа $n_1^2 - n_1 = n_1(n_1 - 1)$ и $n_2^2 - n_2 = n_2(n_2 - 1)$ не делятся на 5 (и тем более на 10^{100}); значит, n_i^2 не оканчивается на n_i.

Замечание. Существуют и другие необычные стозначные числа.

Комментарий. Приведён верный пример одного необычного числа (без обоснования, что оно необычное) — 1 балл.

То же, но с обоснованием — 2 балла.

Приведён верный пример двух необычных чисел (без обоснования, что они необычные) — 4 балла.

Существование необычных чисел можно доказать и не предъявляя их в явном виде, например, пользуясь китайской теоремой об остатках. В подобных случаях китайскую теорему об остатках можно использовать без доказательства.

10.3. В языке племени АУ две буквы — «*а*» и «*у*». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке. (*И. Богданов*)

Ответ. $2^{14} - 2^7 = 16056$.

Первое решение. Если все последовательности, количество букв в которых не меньше 7 и не больше 13, являются словами, то, очевидно, условие задачи соблюдается; при этом количество таких слов равно $2^7 + \ldots + 2^{13} = 2^{14} - 2^7$. Осталось показать, что это количество — наибольшее возможное.

Общее количество последовательностей длины, не превосходящей 13, равно $2 + 2^2 + \ldots + 2^{13} = 2^{14} - 2$. Если среди слов в языке нет ни одного 7-буквенного, то общее количество слов не превосходит $2^{14} - 2 - 2^7 < 2^{14} - 2^7$. Пусть, напротив, а языке существует 7-буквенное слово s. Тогда для каждого слова t, состоящего из 6 или менее букв, последовательность букв st не может являться словом, и все последовательности вида st, очевидно, различны. Значит, если в языке есть k слов из 6 или менее букв, то количество слов из хотя бы 7 букв не превосходит $(2^7 + \ldots + 2^{13}) - k = 2^{14} - 2^7 - k$. Значит, общее количество слов не превосходит $k + (2^{14} - 2^7 - k) = 2^{14} - 2^7$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что слов в языке не больше, чем $2^{14} - 2^7$. Пусть A — множество всех последовательностей из 6 или менее букв, а B — множество всех 7-буквенных последовательностей. Тогда в A всего $2 + 2^2 + \ldots + 2^6 = 2^7 - 2$ последовательностей, а в B всего $2^7 > 2^7 - 2$ последовательностей. Значит, можно сопоставить каждой последовательности $a \in A$ последовательность $b_a \in B$ так, чтобы все последовательности b_a были различными. Заметим, что тогда все последовательности вида ab_a также будут различны (поскольку различны их 7-буквенные окончания).

По условию, в каждой из 2^7-2 троек (a, b_a, ab_a) не больше двух слов языка. Значит, хотя бы 2^7-2 последовательностей из 13 или меньше букв не являются словами, и общее количество слов не больше $(2^{14}-2)-(2^7-2)=2^{14}-2^7$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что в языке может быть $2^{14}-2^7$ слов — 1 балл.

Доказано, что слов не больше, чем $2^{14}-2^7$, но пример отсутствует — 5 баллов.

10.4. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC — точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен 60°. Докажите, что $\dfrac{A_1A_2}{BC}=\dfrac{B_1B_2}{CA}=\dfrac{C_1C_2}{AB}$. (*И. Богданов*)

Решение. Заметим, что

$$\overrightarrow{A_1B_2}+\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{B_1C_2}+\overrightarrow{C_2C_1}+\overrightarrow{C_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_1}=\overrightarrow{0}. \qquad (*)$$

По условию имеем $A_1B_2=B_1C_2=C_1A_2$, и угол между любыми двумя из трех прямых A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 равен 60°. Поэтому, если векторы $\overrightarrow{A_1B_2}$, $\overrightarrow{B_1C_2}$ и $\overrightarrow{C_1A_2}$ отложить последовательно друг за другом (каждый следующий от конца предыдущего), то получится правильный треугольник, откуда $\overrightarrow{A_1B_2}+\overrightarrow{B_1C_2}+\overrightarrow{C_1A_2}=\overrightarrow{0}$. Отсюда и из $(*)$ получаем $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{C_2C_1}=\overrightarrow{0}$.

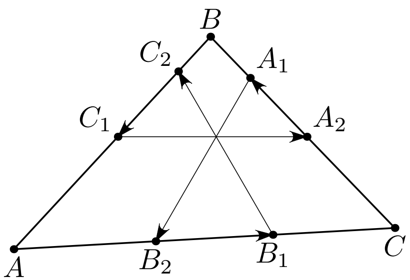

Рис. 2

Следовательно, отложив векторы $\overrightarrow{A_2A_1}$, $\overrightarrow{B_2B_1}$, $\overrightarrow{C_2C_1}$ от некоторой точки последовательно друг за другом, мы получим некоторый треугольник T. Стороны треугольника T параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC, поэтому эти треугольники подобны. Из этого подобия и вытекает требуемое равенство.

Замечание. В решении не используется условие о пересечении трёх отрезков в одной точке.

Комментарий. Показано с помощью векторов или дополнительных построений, что $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{C_2C_1} = \overrightarrow{0}$ — 3 балла.

11 класс

11.1. Дан выпуклый 7-угольник. Выбираются четыре произвольных его угла и вычисляются их синусы, от остальных трёх углов вычисляются косинусы. Оказалось, что сумма таких семи чисел не зависит от изначального выбора четырёх углов. Докажите, что у этого 7-угольника найдутся четыре равных угла.

(*И. Богданов*)

Решение. Рассмотрим одну из сумм из условия. Затем переставим в ней аргументы одного синуса и одного косинуса (назовём эти аргументы α и β, соответственно; сумма при этом изменится на

$$(\sin\beta+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\beta)=\sqrt{2}\,(\sin(\beta-\pi/4)-\sin(\alpha-\pi/4))\,.$$

Поскольку по условию значение суммы не изменяется, получаем, что $\sin(\alpha-\pi/4)=\sin(\beta-\pi/4)$. Поскольку $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, это может случиться лишь при $\alpha-\pi/4=\beta-\pi/4$ или $\alpha-\pi/4=\pi-(\beta-\pi/4)$, то есть при $\beta=\alpha$ или $\beta=3\pi/2-\alpha$.

Итак, если α — произвольный угол 7-угольника, то каждый из остальных его углов равен либо α, либо $3\pi/2-\alpha$. Значит, углы 7-угольника принимают не более двух различных значений, поэтому 4 из них принимают одно и то же значение.

Замечание. Вместо второй части решения можно заметить, что функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[0,3\pi/4]$ и убывает на отрезке $[3\pi/4,\pi]$; значит, уравнение $f(x)=a$ имеет не более двух решений на интервале $(0,\pi)$.

Комментарий. Доказано, что для любых двух углов семиугольника α и β выполнено равенство $\sin(\alpha-\pi/4)=\sin(\beta-\pi/4)$ — 2 балла.

11.2. На доске написано выражение $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Если число a увеличить на 1, то значение этого выражения увеличится на 3. Если в исходном выражении увеличить число c на 1, то его значение увеличится на 4; если же в исходном выражении увеличить число e на 1, то его значение увеличится на 5. Какое наименьшее значение может иметь произведение bdf?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. 60.

Первое решение. Пусть значение исходного выражения равно A. Тогда в результате первой операции произведение примет значение $\frac{a+1}{a} \cdot A = A+3$, откуда $A = 3a$. Значит, A — натуральное число. Кроме того, из этого равенства следует, что оно делится на 3. Аналогично доказывается, что число A делится на 4 и на 5, причём $A = 4c = 5e$. Из попарной взаимной простоты чисел 3, 4 и 5 следует, что A делится на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Значит, $A \geqslant 60$.

Переписав равенство $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = A$ в виде $\frac{A}{3b} \cdot \frac{A}{4d} \cdot \frac{A}{5f} = A$, получаем $A^2 = 60bdf$, откуда $bdf = \frac{A^2}{60} \geqslant 60$. Осталось привести пример, показывающий, что произведение знаменателей может быть равным 60. Один из возможных примеров такой: $\frac{20}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{12}{5}$.

Второе решение. Как и в первом решении, получаем $A = 3a = 4c = 5m$, откуда

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 3, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{e}{f} = 4, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{f} = 5.$$

Умножив первое равенство на второе и разделив на третье, получаем, что $\frac{e^2}{bdf} = \frac{12}{5}$; поскольку дробь справа несократима, знаменатель bdf делится на 5. Аналогично доказывается, что он делится на 3 и на 4, откуда следует, что он делится на 60, то есть не меньше 60.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример, в котором $bdf = 60$ — 1 балл.

Доказано только, что $bdf \geqslant 60$ — 4 балла.

11.3. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы? (*Д. Храмцов*)

Ответ. n.

Решение. Покажем, что n ладей достаточно. Для этого заметим, что на каждую строку хватит одной ладьи: можно поставить её в клетку строки с минимальным номером, а затем обойти все клетки строки в порядке возрастания номеров.

С другой стороны, покажем, что меньше, чем n ладей, может и не хватить. Для этого пронумеруем клетки так, чтобы клетки одной диагонали были пронумерованы $1, 2, \ldots, n$ (остальные клетки нумеруем произвольно). Тогда одна ладья не сможет побывать на двух клетках этой диагонали: если ладья встала на одну из этих клеток, то следующим ходом она обязана будет пойти на клетку с номером, бо́льшим n, и значит, после этого она не сможет вернуться на диагональ.

Наконец, поскольку на каждой клетке диагонали должна побывать ладья, Пете придётся использовать не менее n ладей.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Рассмотрение частных случаев — 0 баллов.

Доказано только, что n ладей всегда достаточно — 3 балла.

Только приведён пример, показывающий, что при каждом n может потребоваться не менее n ладей — 3 балла.

11.4. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. (Здесь через $\angle(PQR, PQS)$ обозначается двугранный угол при ребре PQ в тетраэдре $PQRS$.) Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности. (*А. Акопян*)

Решение. Обозначим через A', B', C', D' проекции вершин A, B, C, D соответственно на плоскость α. Пусть X — произвольная точка на продолжении отрезка KL за точку K. Тогда имеем $\angle(KXA, KXN) = \angle(KLA, KLM)$ и $\angle(KNA, KNX) = \angle(NKD, NKL)$. По условию, эти углы равны; значит, в трехгранном угле $KANX$ (с вершиной K) двугранные углы при ребрах KN и KX равны между собой. Это означает, что плоскость, проходящая через прямую KA и перпендикулярная плоскости α, — это плоскость симметрии трехгранного угла $KANX$. Поэтому точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису угла XKN, то есть на внешней биссектрисе угла NKL.

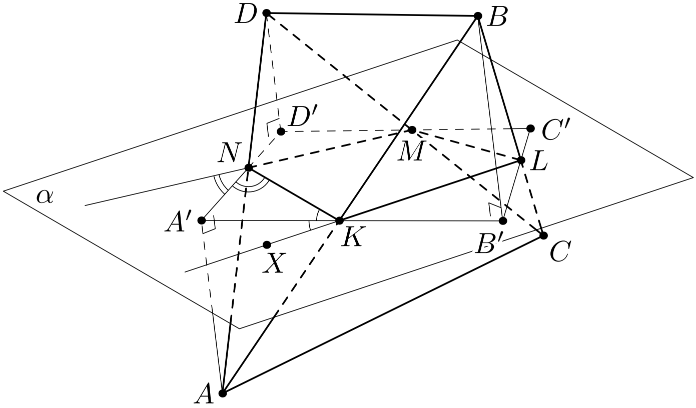

Рис. 3

Аналогично показывается, что A' лежит на внешней биссектрисе угла MNK. Применяя такие же рассуждения для точек B', C', D', получаем, что точки A', B', C', D' — пересечения внешних биссектрис соседних углов четырехугольника $KLMN$.

Из треугольника $A'KN$ находим $\angle B'A'D' = \angle KA'N = 180^\circ - \angle A'KN - \angle A'NK = (90^\circ - \angle A'KN) + (90^\circ - \angle A'NK) = \frac{1}{2}(\angle NKL + \angle MNK)$. Аналогично получаем, что $\angle B'C'D' = \frac{1}{2}(\angle KLM + \angle LMN)$. Таким образом, $\angle B'A'D' + \angle B'C'D' = \frac{1}{2}(\angle NKL + \angle MNK + \angle KLM + \angle LMN) = 180^\circ$, откуда и следует, что четырехугольник $A'B'C'D'$ — вписанный.

Комментарий. Если в решении не обосновано расположение точек — баллы не снимаются.

Материалы для проведения регионального этапа

XL ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2013–2014 учебный год

Второй день

4–5 февраля 2014 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Антропов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.И. Голованов, А.Ю. Головко, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Д.Д. Карпушкин, П.А. Кожевников, Д.Н. Крачун, А.Д. Матушкин, Е.Г. Молчанов, О.С. Нечаева, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, Р.С. Садыков, В.А. Сендеров, М.Б. Скопенков, К.А. Сухов, Д.А. Терёшин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, А.С. Циглер, В.З. Шарич.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013–2014 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 4 и 5 февраля 2014 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

В связи со значительным различием во времени между восточными и западными регионами страны, с 2013-2014 учебного года предусмотрено изменение времени начала туров регионального этапа в соответствии с часовыми поясами; время начала туров указано в таблице ниже.

Разница с московским временем	Начало туров (по местному времени)
-1 час или 0 часов	10 часов
$+1$ час или $+2$ часа	11 часов
$+3$ часа или $+4$ часа	12 часов
$+5$ часов	13 часов
$+6$ часов	14 часов
$+7$ часов или $+8$ часов	15 часов

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Число x таково, что среди четырёх чисел $x-\sqrt{2}$, $x-1/x$, $x+1/x$, $x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. $\sqrt{2}-1$.

Решение. Обозначим $a=x-\sqrt{2}$, $b=x-1/x$, $c=x+1/x$, $d=x^2+2\sqrt{2}$. Заметим, что b и c не могут одновременно быть целыми. Действительно, тогда число $b+c=2x$ также целое, значит, x рационально, поэтому как a, так и d не будут целыми как суммы рационального и иррационального чисел. Итак, одно из чисел b и c нецелое, а тогда a и d должны оба быть целыми.

Значит, $x=a+\sqrt{2}$ при целом a. Тогда $d=a^2+2a\sqrt{2}+2+ +2\sqrt{2}=(a^2+2)+(2a+2)\sqrt{2}$, откуда следует, что $2a+2=0$, так как иначе d иррационально. Итак, $a=-1$, откуда $x=\sqrt{2}-1$. Осталось проверить, что найденное число подходит: для него целыми будут числа $a=-1$, $b=-2$ и $d=3$.

Комментарий. Только предъявлен ответ, но не доказана его единственность — 1 балл.

Доказано только, что a и d целые — 3 балла (эти баллы могут суммироваться с баллом за ответ).

Доказано, что может подойти лишь $x=\sqrt{2}-1$, но не проверено, что это значение подходит — 6 баллов.

9.6. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

(*П. Кожевников*)

Ответ. 5 рублей.

Решение. Рассмотрим 4026-значное число A, состоящее из

2013 единиц и 2013 двоек. Пусть в этом числе в нечётных разрядах стоит k единиц и $\ell = 2013-k$ двоек, тогда в чётных разрядах будет k двоек и ℓ единиц (здесь k может принимать любое целое значение от 0 до 2013). Разность сумм цифр в нечётных разрядах и чётных разрядах равна $(k+2\ell)-(2k+\ell) = \ell-k = 2013-2k$. Поскольку 2013 делится на 11, число A делится на 11 тогда и только тогда, когда k делится на 11.

За один ход k изменяется не более чем на 1. Поэтому, если Вася изначально сложит число A, для которого, скажем $k = 5$ (очевидно, это возможно), то, очевидно, Пете потребуется не менее 5 раз изменить k на 1, чтобы впервые получить число, для которого k кратно 11 (т. е. $k = 0$ или $k = 11$).

Покажем, что наоборот, пяти ходов Пете всегда хватит. Меняя некоторую единицу, стоящую в нечётном разряде, с двойкой, стоящей в чётном разряде, он может уменьшить k на 1 за один ход, если только $k \neq 0$. Аналогично, меняя некоторую двойку, стоящую в нечётном разряде, с единицей, стоящей в чётном разряде, он может увеличить k на 1 за один ход, если только $k \neq 2013$. Пусть начальное Васино число давало остаток r при делении на 11. Если $r = 0$, то исходное число уже делится на 11, и ничего делать не нужно. Если $1 \leqslant r \leqslant 5$, то за r операций Петя может уменьшить k на r до ближайшего числа, кратного 11. Если же $6 \leqslant r \leqslant 10$, то за $11-r \leqslant 5$ операций Петя может увеличить k на $11 - r$ до ближайшего числа кратного 11 (это возможно, так как наибольшее возможное значение $k = 2013$ кратно 11).

Замечание. Если бы у мальчиков было по n карточек с цифрами 1 и 2, ответ в аналогичной задаче зависел бы от остатка от деления n на 11 — даже при больших n. Так, если $n = 2000$, то Пете нужно добиться того, чтобы k имело остаток 10 при делении на 11; значит, если $k = 2000$ или $k = 0$, то Пете может понадобиться 10 ходов.

Поэтому полное решение задачи должно существенно использовать тот факт, что $n = 2013$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример числа, с которым нельзя совершить требуемое меньше, чем за 5 ходов, **и доказано**, что это число именно такое — 3 балла.

Доказано только, что из любого числа можно получить делящееся на 11 не более, чем за 5 ходов — 3 балла.

Если в решении не используется тот факт, что $n = 2013$ — ставится не более 5 баллов.

Критерий делимости на 11 можно использовать без доказательства.

9.7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC? (*Г. Жуков*)

Ответ. 90°.

Решение. Обозначим через N и M середины отрезков KC и AC соответственно. Тогда MN — средняя линия в треугольнике AKC, поэтому $\angle BAC = \angle NMC$. Кроме того, $\angle BAC = \angle BDC$, так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

Пусть точки M и N лежат с одной стороны от прямой BD. Тогда M лежит внутри треугольника BCD; тогда она лежит внутри треугольника BND, а значит, и внутри его описанной окружности. Но тогда точки B, N, D и M не могут лежать на одной окружности. Значит, N и M лежат по разные стороны от BD, и $\angle BDC = \angle BMN$.

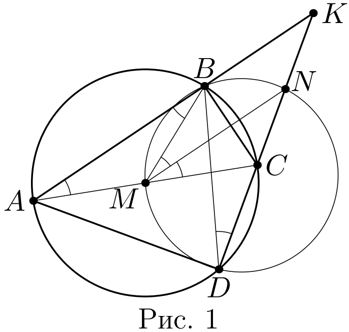

Рис. 1

Из параллельности MN и AK вытекает, что $\angle BMN = \angle ABM$, откуда $\angle BAC = \angle BDC = \angle ABM$. Отсюда получаем $AM = MB$, то есть в треугольнике ABC медиана BM равна половине стороны AC, откуда $\angle ABC = 90^\circ$, а значит, и $\angle ADC = 90^\circ$.

Комментарий. За отсутствие обоснования расположения точек M и N баллы не снимаются.

9.8. Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$? (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.) *(А. Храбров)*

Ответ. Второе число больше.

Решение. Пусть $a = 99!$. Тогда нам нужно сравнить числа $(100a)!$ и $a^{100a} \cdot (100a)^a$. Заметим, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a < a^a,$$
$$(a+1)(a+2)(a+3) \cdot \ldots \cdot 2a < (2a)^a,$$
$$(2a+1)(2a+2)(2a+3) \cdot \ldots \cdot 3a < (3a)^a,$$
$$\vdots$$
$$(99a+1)(99a+2)(99a+3) \cdot \ldots \cdot 100a < (100a)^a.$$

Перемножим эти неравенства. Слева получим произведение всех чисел от 1 до $100a$, т. е. в точности $(100a)! = (100!)!$, а справа — число
$a^a(2a)^a(3a)^a \cdot \ldots \cdot (100a)^a = a^{100a} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)^a = a^{100a}(100!)^a$, т. е. в точности $a^{100a}(100a)^a = 99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Доказательство неравенства $(n!)! < (n-1)!^{n!} \cdot n!^{(n-1)!}$ при маленьких значениях n, не обобщающееся на случай $n = 100$ — 0 баллов.

10 класс

10.5. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Да.

Решение. Пусть Петя первым ходом сделает свободный член уравнения нулём. Тогда полученное уравнение точно будет иметь корень 0; значит, Пете достаточно добиться того, чтобы другим корнем было число $t = 2014$. Это всегда можно сделать: если после хода Васи получится уравнение $x^3 + ax^2 + *x = 0$, то Петя может заменить оставшуюся звёздочку на $-t(t+a)$, а если после хода Васи получится $x^3 + *x^2 + bx = 0$, то Петя может заменить звёздочку числом $-(t^2+b)/t$. Очевидно, все числа, которые ставит Петя, рациональны.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведена стратегия Пети, работающая не при всех возможных ходах Васи, либо же требующая использования иррациональных чисел — 0 баллов.

Приведена стратегия, которая позволяет Пете гарантированно выиграть, но этот факт не обоснован — не более 5 баллов.

Баллы не снимаются в случае отсутствия указания на то, что числа, используемые Петей, рациональны, если их рациональность очевидна.

10.6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой. (*Р. Садыков*)

Решение. Поскольку CP и BP — касательные к Ω, имеем $\angle OBP = \angle OCP = 90°$; значит, точка P лежит на описанной окружности треугольника OBC, и PO — диаметр этой окружности (см. рис. 2). Поэтому $\angle OSP = 90^\circ$. Далее, поскольку AO — диаметр окружности, проходящей через A, S и O, получаем $\angle ASO = 90^\circ$. Итак, точки A и P лежат на перпендикуляре к OS, проходящем через точку S. Отсюда и следует утверждение задачи.

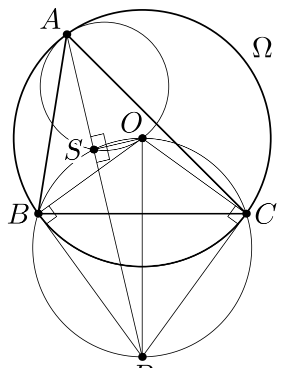

Рис. 2

Замечание. В задаче предложено новое описание *симедианы* треугольника ABC. По определению, его симедиана из вершины A — это прямая, симметричная медиане из этой вершины относительно биссектрисы угла A. То, что прямая AS в нашей задаче — симедиана, следует из того известного факта, что симедиана из вершины A проходит через точку P пересечения касательных к описанной окружности, проведённых из остальных вершин треугольника. Об этом и других свойставх симедианы можно прочитать, например, в главе VI книги Д. Ефремова «Новая геометрия треугольника». В этой главе также много говорится о *точке Лемуана* — точке пересечения всех трёх симедиан треугольника.

10.7. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

(*С. Берлов*)

Ответ. Не могут.

Решение. Пусть $n = 10^{1000}$. Обозначим исходные числа (в порядке обхода) через $a_1, \ldots, a_n$; мы будем считать, что $a_{n+1} = a_1$. Положим $b_i = \text{НОК}(a_i, a_{i+1})$. Предположим что числа $b_1, \ldots, b_n$ — это n подряд идущих натуральных чисел.

Рассмотрим наибольшую степень двойки 2^m, на которую делится хотя бы одно из чисел a_i. Заметим, что ни одно из чисел $b_1, \ldots, b_n$ не делится на 2^{m+1}. Пусть для определённости $a_1 \,\vdots\, 2^m$;

тогда $b_1 \vdots 2^m$ и $b_n \vdots 2^m$. Значит, $b_1 = 2^m x$ и $b_n = 2^m y$ при некоторых нечётных x и y. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$. Тогда, поскольку $b_1, \ldots, b_n$ образуют n последовательных чисел, среди них должно быть и число $2^m(x+1)$ (поскольку $2^m x < 2^m(x+1) < 2^m y$). Но это число делится на 2^{m+1} (так как $x+1$ четно), что невозможно. Противоречие.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Доказано, что среди исходных чисел есть два числа, делящихся на 2^k (число k определено в решении) — 2 балла.

10.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

(*С. Берлов*)

Решение. Построим граф с вершинами $r_1, \ldots, r_{50}$, соответствующими строкам доски, и вершинами $c_1, \ldots, c_{50}$, соответствующим её столбцам. Вершины r_i и c_j соединим ребром, если клетка в пересечении соответствующих строки и столбца свободна. Тогда Васина цель переформулируется так: *требуется отметить не более 99 рёбер так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер.* Действительно, если Вася поставит фишки в клетки, соответствующие отмеченным рёбрам, то в каждой строке и каждом столбце останется чётное число свободных клеток, что, очевидно, равносильно требуемому условию.

Мы докажем более общий факт: в любом графе на $n \geqslant 2$ вершинах можно отметить не более $n-1$ ребра так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер. При $n = 100$ получаем требуемое утверждение.

Индукция по n. База при $n = 2$ очевидна. Пусть теперь $n > 2$. Если есть вершина степени 1, то можно пометить единственное ребро, выходящее из неё, выкинуть её вместе с этим ребром и применить к оставшемуся графу предположение индукции; в результате окажется отмеченным ещё $n-2$ ребра. Если в графе есть вершина степени 0, то достаточно выкинуть её и применить предположение индукции.

Пусть теперь степень каждой вершины не меньше 2. Выйдем из произвольной вершины по ребру, из вершины, в которую мы пришли — по другому ребру, и т.д.; этот процесс можно продолжать, пока мы не вернёмся в вершину, в которой уже побывали. Таким образом, в графе нашёлся цикл. Выкинув его рёбра из графа, мы не изменим чётностей степеней вершин; значит, достаточно отметить требуемые рёбра в оставшемся графе. Применяя к нему тот же процесс, рано или поздно мы получим граф, в котором степень некоторой вершины не превосходит 1; а для таких графов утверждение уже доказано выше.

Комментарий. Утверждение о том, что в графе на n вершинах, число рёбер в котором не меньше n, обязательно есть цикл, можно использовать без доказательства.

11 класс

11.5. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально. (*Н. Агаханов*)

Решение. Из условия следует, что число $(x+yz)(y+zx) = xy+(x^2+y^2)z+xyz^2 = (xy+z)+xyz^2$ рационально. Поскольку число $xy+z$ также рационально по условию, то и число $xyz^2 = (x+yz)(y+zx)-(xy+z)$ также рационально.

Замечание. Из условий задачи не следует, что все три числа x, y, z рациональны. Например, этим условиям удовлетворяет тройка чисел $x = \frac{1-\sqrt{7}}{4}$, $y = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$, $z=1$.

11.6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC? (*Г. Жуков*)

Ответ. 90°.

Решение. Обозначим через N и M середины отрезков KC и AC соответственно. Тогда MN — средняя линия в треугольнике AKC, поэтому $\angle BAC = \angle NMC$. Кроме того, $\angle BAC = \angle BDC$, так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

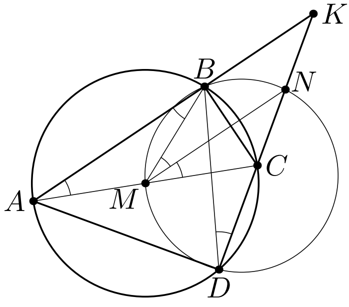

Рис. 3

Пусть точки M и N лежат с одной стороны от прямой BD. Тогда M лежит внутри треугольника BCD; тогда она лежит внутри треугольника BND, а значит, и внутри его описанной окружности. Но тогда точки B, N, D и M не могут лежать на одной окружности. Значит, N и M лежат по разные стороны от BD, и $\angle BDC = \angle BMN$.

Из параллельности MN и AK вытекает, что $\angle BMN = \angle ABM$, откуда $\angle BAC = \angle BDC = \angle ABM$. Отсюда получаем $AM = MB$, то есть в треугольнике ABC медиана BM

равна половине стороны AC, откуда $\angle ABC = 90^\circ$, а значит, и $\angle ADC = 90^\circ$.

Комментарий. За отсутствие обоснования расположения точек M и N баллы не снимаются.

11.7. Дан многочлен
$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$
у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень? (*И. Богданов, К. Сухов*)

Ответ. $n = 100$.

Решение. Назовём многочлен, удовлетворяющий условию задачи, *красивым*. Многочлен $P(x) = 100(x^{200} + x^{198} + \ldots + x^2 + 1) + 101(x^{199} + x^{197} + \ldots + x)$ красив и имеет корень -1. Значит, при $n = 100$ требуемое возможно.

Осталось показать, что при $n < 100$ у красивого многочлена $P(x)$ не может быть вещественных корней. Для этого достаточно проверить, что $P(x) > 0$ при всех x. Это неравенство, очевидно, выполнено при $x \geqslant 0$; для отрицательных же $x = -t$ оно является следствием неравенства
$$100(t^{2n} + t^{2n-2} + \ldots + t^2 + 1) > 101(t^{2n-1} + t^{2n-3} + \ldots + t). \quad (*)$$
Значит, достаточно доказать это неравенство при всех $t > 0$. Умножая $(*)$ на $t + 1$, получаем равносильное неравенство $100(t^{2n+1} + t^{2n} + \ldots + 1) > 101(t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t)$, или
$$100(t^{2n+1} + 1) > t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t. \quad (**)$$

Заметим, что при всех $k = 1, \ldots, n$ верно неравенство $(t^k - 1)(t^{2n+1-k} - 1) \geqslant 0$, поскольку обе скобки имеют одинаковые знаки при $t > 0$. Раскрывая скобки, получаем
$$t^{2n+1} + 1 \geqslant t^{2n+1-k} + t^k.$$
Складывая все такие неравенства и учитывая, что $n < 100$, получаем
$$t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t \leqslant n(t^{2n+1} + 1) < 100(t^{2n+1} + 1),$$
что и доказывает $(**)$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример многочлена, удовлетворяющего условию задачи при $n = 100$ — 1 балл.

Доказано, что $n \geqslant 100$ — 4 балла.

Если это неравенство не доказано, но сведено к неравенству (**) — 2 балла.

11.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

(*С. Берлов*)

Решение. Построим граф с вершинами $r_1, \ldots, r_{50}$, соответствующими строкам доски, и вершинами $c_1, \ldots, c_{50}$, соответствующим её столбцам. Вершины r_i и c_j соединим ребром, если клетка в пересечении соответствующих строки и столбца свободна. Тогда Васина цель переформулируется так: *требуется отметить не более 99 рёбер так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер.* Действительно, если Вася поставит фишки в клетки, соответствующие отмеченным рёбрам, то в каждой строке и каждом столбце останется чётное число свободных клеток, что, очевидно, равносильно требуемому условию.

Мы докажем более общий факт: в любом графе на $n \geqslant 2$ вершинах можно отметить не более $n - 1$ ребра так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер. При $n = 100$ получаем требуемое утверждение.

Индукция по n. База при $n = 2$ очевидна. Пусть теперь $n > 2$. Если есть вершина степени 1, то можно пометить единственное ребро, выходящее из неё, выкинуть её вместе с этим ребром и применить к оставшемуся графу предположение индукции; в результате окажется отмеченным ещё $n-2$ ребра. Если в графе есть вершина степени 0, то достаточно выкинуть её и применить предположение индукции.

Пусть теперь степень каждой вершины не меньше 2. Выйдем из произвольной вершины по ребру, из вершины, в которую мы пришли — по другому ребру, и т.д.; этот процесс можно продолжать, пока мы не вернёмся в вершину, в которой уже побывали. Таким образом, в графе нашёлся цикл. Выкинув его рёбра из графа, мы не изменим чётностей степеней вершин; значит, достаточно отметить требуемые рёбра в оставшемся графе. Применяя к нему тот же процесс, рано или поздно мы получим граф, в котором степень некоторой вершины не превосходит 1; а для таких графов утверждение уже доказано выше.

Комментарий. Утверждение о том, что в графе на n вершинах, число рёбер в котором не меньше n, обязательно есть цикл, можно использовать без доказательства.