Материалы для проведения регионального этапа

XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

Первый день

5–6 февраля 2016 г.

Москва, 2015

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, И. И. Богданов, И. А. Бочков, А. А. Гаврилюк, Н. А. Гладков, А. И. Голованов, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, К. А. Кноп, А. С. Кузнецов, В. Б. Мокин, В. А. Омельяненко, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Эксперт: к. ф.-м. н. С. П. Коновалов.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **05 февраля 2016 г.** (I тур) и **06 февраля 2016 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 8 задач — по 4 задачи в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–4 — I тур, задачи 5–8 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2015–2016 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, апелляции и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015–2016 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Только 0.

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2+bx+c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$. (*Б. Обухов*)

Решение. Так как CC' — диаметр Ω, имеем $\angle C'AC = 90^\circ$. Поскольку $MP \parallel BC$, получаем $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$ (см. рис. 1). Значит, треугольник AMP — равнобедренный, и поэтому его высота MD является и медианой. Так как $AD = DP$ и $AC' \parallel DM$, по теореме Фалеса получаем, что $C'M = MP$.

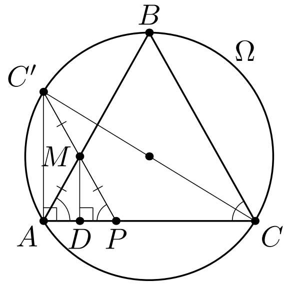

Рис. 1

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием подсчёта углов в прямоугольном треугольнике PAC'; именно, $\angle MAC' = 90^\circ - \angle MAP = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle MPA = \angle MC'A$, откуда $MP = MA = MC'$.

9.3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим степени двойки, на которые делятся выписанные числа; пусть 2^k — наибольшая из них. Если хотя бы два выписанных числа делятся на 2^k, то два соседних таких числа будут различаться на 2^k. Значит, одно из них будет делиться на 2^{k+1}, что невозможно в силу выбора k. Значит, среди выписанных чисел ровно одно делится на 2^k.

Наименьшее общее кратное (НОК) группы, содержащей это число, будет делиться на 2^k, а НОК оставшейся группы — не будет. Значит, сумма этих НОК не делится на 2^k; с другой стороны, эта сумма больше, чем 2^k. Поэтому эта сумма не может быть степенью двойки.

Комментарий. Доказано, что ровно одно из выписанных чисел делится на максимальную степень двойки — 2 балла.

9.4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, …, 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. За 2 загрузки.

Решение. Покажем, что Архимеду достаточно использовать мешок дважды. Пусть он сначала положит в мешок слитки с весами 1, 2, 3 и 5 кг, а потом — слитки с весами 1, 4 и 6 кг. В обоих случаях мешок не порвётся.

Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды был использован слиток веса 1 кг. Действительно, если бы Архимед в эти два раза вместо слитков с весами $1, \ldots, 6$ кг использовал соответственно слитки с весами $w_1, \ldots, w_6$ кг, то эти веса удовлетворяли бы системе неравенств $w_1 + w_2 + w_3 + w_5 \leqslant 11$, $w_1 + w_4 + w_6 \leqslant 11$. Складывая эти неравенства, получаем $w_1 + (w_1 + w_2 + \ldots + w_6) \leqslant 22$. В скобках стоит сумма шести различных натуральных чисел, то есть она не меньше $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$. Отсюда следует, что $w_1 \leqslant 22 - 21 = 1$. Значит, $w_1 = 1$, то есть слиток веса 1 кг однозначно определён.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Архимед загрузит один слиток, то мешок не порвётся в любом случае, то есть никакой слиток идентифицировать не удастся. Пусть Архимед загрузит больше одного слитка, и мешок не порвётся. Если слиток в 1 кг не загружен в мешок, то при замене им любого слитка из мешка результат не изменится; значит, в этом случае Гиерон даже не сможет понять, находится ли этот слиток в мешке. Если же искомый слиток в мешке, то Гиерон не сможет понять, какой из (хотя бы двух) загруженных слитков — требуемый.

Замечание. После указанных двух загрузок также однозначно определяется группа гирь с весами 2, 3 и 5 кг, а также группа с весами 4 и 6 кг.

Комментарий. Доказано только, что одной загрузки мешка недостаточно — 1 балл.

Приведён только верный пример двух загрузок, но не доказано, что он работает — 3 балла (эти баллы могут складываться с предыдущим).

Приведён верный пример двух загрузок, доказано, что он работает, но не доказано, что одной загрузкой не обойтись — 6 баллов.

10 класс

10.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Только 0.

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2+bx+c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

10.2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. Нет, не может.

Решение. Предположим противное. Заметим, что число, оканчивающееся на 2016, обязательно делится на 16.

Среди десяти петиных чисел есть либо одно, либо два числа, делящихся на 8. В первом случае одно из полученных наименьших общих кратных (НОК) делится на 8, а второе — нет, и потому их сумма не делится даже на 8. Во втором же случае разность двух петиных чисел, делящихся на 8, равна 8, поэтому одно из них делится на 16, а другое — нет. Следовательно, одно из НОК делится на 16, а другое — нет. Значит, и в этом случае сумма НОК делиться на 16 не может.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Разобран только случай, когда на 8 делится ровно одно число из десяти — 3 балла.

10.3. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

(*Т. Зиманов, П. Кожевников*)

Решение. В случае $AB \parallel CD$ имеем $BC = KN$, поэтому $AK = BL = CM = DN$. Значит, четырёхугольник $LMDA$ получается из $BCNK$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BL}$.

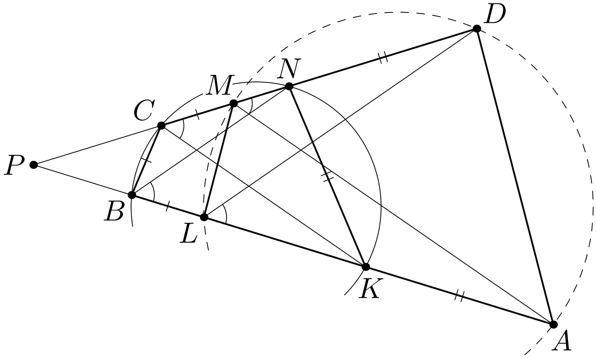

Рис. 2

Пусть теперь AB и CD не параллельны; обозначим через P точку пересечения прямых AB и CD. Так как четырёхугольник $BCNK$ вписан, треугольники PBC и PNK подобны; отсюда $\frac{PB}{BL} = \frac{PB}{BC} = \frac{PN}{NK} = \frac{PN}{ND}$. Значит, $BN \parallel LD$ (см. рис. 2). Аналогично, $CK \parallel MA$. Отсюда получаем $\angle ALD = \angle KBN$ и $\angle KCN = \angle AMD$.

Так как четырёхугольник $BCNK$ вписан, то $\angle KBN = \angle KCN$. Поэтому и $\angle ALD = \angle AMD$, то есть $ADML$ также вписан.

Замечание. Есть и другие решения; например, из равенств $\angle AKN = \angle NCB$ и $\angle DNK = \angle KBC$ следует, что четырехугольники $BCML$ и $NKAD$ подобны, поэтому $\angle BLM = \angle MDA$.

Комментарий. Доказано, что $BN \parallel LD$ (или $CK \parallel MA$, или обе эти параллельности) — 3 балла.

Верное доказательство подобия четырехугольников $BCLM$ и $NKAD$ — не менее 3 баллов.

За рассмотрение частного случая, скажем $AB \parallel CD$ — 0 баллов.

Если предъявлено верное решение, формально не работающее в случае $AB \parallel CD$ — баллы не снимаются.

10.4. Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток? (*И. Богданов*)

Ответ. $6 \cdot 50^2 - 5 \cdot 50 + 1 = 14\,751$ пар.

Решение. Обозначим длину стороны таблицы через $2n = 100$ (так что $n = 50$) и пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо числами от 1 до $2n$.

В каждой строке может быть от 0 до $2n$ чёрных клеток. Так как количества чёрных клеток во всех строках различны, эти количества — все числа от 0 до $2n$, кроме одного (скажем, кроме k). Тогда общее число чёрных клеток равно $(0+1+\ldots+2n) - k = 2n^2 + n - k$. С другой стороны, так как во всех столбцах клеток поровну, общее число чёрных клеток должно делиться на $2n$. Значит, $k = n$, и во всех столбцах по $2n^2/(2n) = n$ чёрных клеток.

Оценим теперь сверху количество пар соседних по стороне разноцветных клеток, считая отдельно пары клеток, соседних по горизонтали и по вертикали.

Если в строке $i \leqslant n-1$ чёрных клеток, то они могут участвовать не более, чем в $2i$ горизонтальных парах. Если в строке $i \geqslant n+1$ чёрных клеток, аналогичное рассуждение можно применить к белым клеткам, коих $2n - i \leqslant n-1$. Итого, горизонтальных разноцветных пар не больше, чем $2 \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \ldots + 2 \cdot (n-1)) = 2n(n-1)$.

Оценим теперь количество вертикальных пар. Рассмотрим любую строку с чётным номером от 2 до $2(n-1)$; пусть в ней i чёрных клеток. Тогда либо в строке сверху, либо в строке снизу от неё число чёрных клеток не равно $100 - i$; значит, одна из вертикальных пар, в которых участвуют клетки нашей строки, будет одноцветной. Итого, есть хотя бы $n - 1$ одноцветных вертикальных пар. Так как общее число вертикальных пар равно $2n(2n - 1)$, то разноцветных из них — не больше, чем $2n(2n - 1) - (n - 1)$. Итого, общее число разноцветных пар не больше, чем $2n(n - 1) + (4n^2 - 3n + 1) = 6n^2 - 5n + 1 = 14751$.

Осталось привести пример, в котором указанное число пар достигается. Проведём в нашей таблице $2n \times 2n$ диагональ из верхнего левого угла в нижний правый. Все клетки, лежащие на или ниже диагонали, покрасим в чёрный цвет, если они лежат в чётных строках, и в белый — иначе (раскраска «по строкам»). Все клетки, лежащие выше диагонали, покрасим в чёрный цвет, если сумма номеров их строки и столбца чётна, и в белый иначе («шахматная» раскраска). Пример такой раскраски при $n = 4$ показан на рис. 3. Нетрудно проверить, что в каждом столбце ровно по n чёрных клеток, в $2i$-й строке есть $n + i$ чёрных клеток, а в $(2i - 1)$-й строке — $n - i$ чёрных клеток. Кроме того, все оценки выше достигаются.

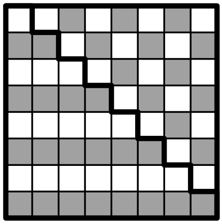

Рис. 3

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ и верный пример — 2 балла.

Только доказательство точной оценки — 4 балла.

Доказательство точной оценки только на количество вертикальных или только на количество горизонтальных разноцветных пар — 2 балла (могут складываться с баллами за правильный пример).

Доказано, что в таблице нет строки, содержащей ровно 50 чёрных клеток — ставится 1 балл, если в работе нет других существенных продвижений (иначе этот балл не добавляется).

11 класс

11.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным? *(Г. Жуков)*

Ответ. Нет, не может.

Решение. Так как трёхчлен $f(x)$ не имеет корней, то $c = f(0) \neq 0$ и $f(c) \neq 0$. Тогда выражение $\frac{f(c)}{c}$ иррационально как отношение рационального и иррационального чисел. Но $\frac{f(c)}{c} = \frac{ac^2 + bc + c}{c} = ac + b + 1$. Так как $b + 1$ рационально, то ac — иррационально. Получаем, что дискриминант $D = b^2 - 4ac$ иррационален как разность рационального и иррационального чисел.

Комментарий. В целом верное решение не проходит, если $c = 0$ и/или $f(c) = 0$ — 6 баллов.

11.2. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

(А. Храбров)

Решение. По неравенству о средних имеем

$$xy+xz \geqslant 2\sqrt{xy \cdot xz}, \quad xy+yz \geqslant 2\sqrt{xy \cdot yz}, \quad xz+yz \geqslant 2\sqrt{xz \cdot yz}.$$

Сложим эти три неравенства и разделим полученное на 2. С учётом условия, получаем

$$xyz \geqslant xy + xz + yz \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}.$$

Деля полученное неравенство на $\sqrt{xyz}$, получаем требуемое.

Замечание. Это решение легче придумать, если переписать данное и требуемое неравенства в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant 1$ и $\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \leqslant 1$.

11.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны. (*А. Кузнецов*)

Решение. Так как BL — биссектриса $\angle ABC$, имеем $\angle ABL = \angle LBC$. Поскольку PB — касательная к Ω, имеем $\angle PBA = \angle BCA$ (см. рис. 4). Кроме того, $\angle PBL = \angle PBA + \angle ABL = \angle BCA + \angle LBC = \angle BLP$, значит, $\angle BPM = 180^\circ - (\angle PBL + \angle BLP) = 180^\circ - 2\angle BLP$. Отсюда следует, в частности, что $\angle BLP$ — острый.

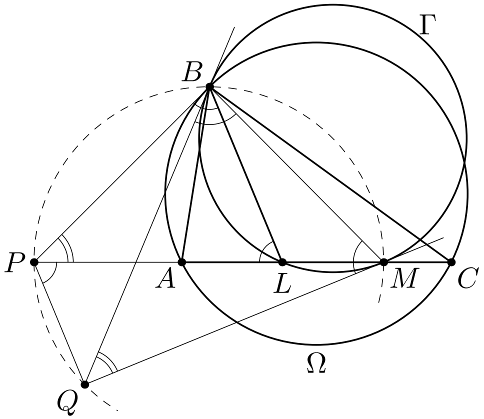

Рис. 4

Так как $\angle BLM = 180^\circ - \angle BLP$ тупой, касательные к Γ в точках B и M пересекаются в точке Q, лежащей по ту же сторону от BM, что и точка L (а значит — по ту же сторону, что и P). Далее, имеем $\angle QBM = \angle QMB = 180^\circ - \angle BLM = \angle BLP$. Значит, $\angle BQM = 180^\circ - 2\angle QBM = 180^\circ - 2\angle BLP = \angle BPM$. Поэтому точки B, M, P и Q лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle QPM = \angle QBM = \angle BLP$. Это и означает, что $PQ \parallel BL$.

Комментарий. Доказано, что четырёхугольник $BPQM$ вписан — 3 балла.

Задача сведена к доказательству вписанности четырёхугольника $BPQM$ — 2 балла.

Доказано, что точки P и Q лежат с одной стороны от BM — 0 баллов.

За отсутствие обоснования расположения точки Q баллы не снимаются.

11.4. Есть клетчатая доска 2015×2015. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. $k = 2(2015 - 1500) = 1030$.

Решение. Покажем, что 1030 детекторов Диме хватит. Пусть он расположит 515 детекторов в 515 левых клетках средней строки квадрата, а остальные 515 детекторов — в 515 верхних клетках среднего столбца. Заметим, что при любом положении корабля его левый столбец лежит в одном из 516 левых столбцов доски. Если этот столбец — один из 515 самых левых, то корабль накроет детектор из этого столбца, лежащий в средней строке, иначе ни одного детектора из этой строки корабль не накроет. Значит, по показаниям детекторов из этой строки восстанавливается, в каких столбцах лежит корабль. Аналогично, строки, в которых он находится, восстанавливаются по показаниям детекторов из среднего столбца.

Рассмотрим теперь произвольную расстановку k детекторов, удовлетворяющих требованиям. Рассмотрим два положения корабля, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1. Показания какого-то детектора для них будут различаться, только если этот детектор лежит в самом левом столбце левого корабля или в самом правом столбце правого. Значит, в любых двух вертикальных прямоугольниках 1500×1, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Аналогично, в любых двух горизонтальных прямоугольниках 1×1500, отличающихся вертикальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Назовём такие пары прямоугольников *вертикальными* и *горизонтальными*, соответственно.

Выделим все вертикальные пары, лежащие в нижних 1500 и в верхних 1500 строках доски (таких пар $2\cdot515 = 1030$). Аналогично, выделим все 1030 горизонтальных пар, лежащих в левых 1500 и в правых 1500 столбцах. Разобьём доску на 9 прямоугольных областей так, как показано на рис. 3. Выделенные пары не покрывают клеток из E; каждая же клетка в остальных областях покрыта двумя выделенными парами (в D и F — двумя вертикальными, в B и H — двумя горизонтальными, а в областях A, C, G и I — одной горизонтальной и одной вертикальной). Итак, каждый детектор лежит не более, чем в двух выделенных парах; значит, чтобы в каждой выделенной паре был хотя бы один детектор, требуется не менее $2 \cdot 1030/2 = 1030$ детекторов.

Замечание. Существует много других примеров расположения 1030 детекторов, удовлетворяющих требованиям.

Комментарий. Приведён пример расстановки 1030 детекторов, удовлетворяющей требованиям — 1 балл.

Доказано только, что $k \geqslant 1030$ — 5 баллов.

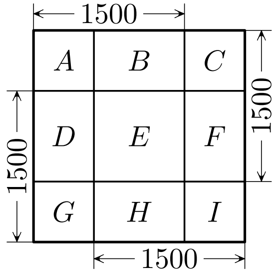

Рис. 5

Если при в целом верном рассуждении в подсчёте количества детекторов в примере или оценке совершена одна или несколько ошибок на единицу (например, считается, что число выделенных вертикальных пар в нижних строках равно 516, а не 515) — снимается 1 балл.

Содержание

Материалы для проведения регионального этапа

XLII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

Второй день

5–6 февраля 2016 г.

Москва, 2015

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, И. И. Богданов, И. А. Бочков, А. А. Гаврилюк, Н. А. Гладков, А. И. Голованов, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Г. К. Жуков, А. П. Зимин, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, К. А. Кноп, А. С. Кузнецов, В. Б. Мокин, В. А. Омельяненко, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Эксперт: к. ф.-м. н. С. П. Коновалов.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015–2016 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **05 февраля 2016 г.** (I тур) и **06 февраля 2016 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 8 задач — по 4 задачи в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–4 — I тур, задачи 5–8 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2015–2016 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, апелляции и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2015–2016 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)

(*И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Первое решение. Предъявим пример, как такое могло произойти. Выстроим учеников по кругу. Предположим, что к каждому на день рождения пришли все одноклассники, кроме следующего за ним по часовой стрелке. Тогда любые два ученика A и B встретились на всех празднованиях, кроме двух: того, на которое не пришёл A, и того, на которое не пришёл B. Значит, любая пара учеников встретилась 21 раз.

Второе решение. Предъявим другой возможный пример. Выделим из класса двух учеников A и B. Пусть на день рождения к A пришли все одноклассники, кроме B, на день рождения к B пришёл только A, а на остальные дни рождения приходил только B. Тогда любая пара, в которой нет B, встретилась только на дне рождения A, а все пары, содержащие B, встречались ровно по разу на остальных празднованиях. Итого, каждая пара встретилась ровно по разу.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён правильный пример, возможно, без обоснования или с неверным обоснованием — не менее 5 баллов.

9.6. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит

в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Множество всех натуральных чисел, а также множества $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ и $\{1,2,3,4\}$.

Решение. Для начала проверим, что множества $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$, а также множество всех натуральных чисел — полные. Для последнего множества это очевидно; для первых четырёх заметим, что если натуральные числа a и b таковы, что $a+b \leqslant 4$, то либо они оба равны 2, либо одно из них равно 1; в любом из этих случаев имеем $ab \leqslant a+b$. Значит. если $a+b \in A$, то и $ab \in A$.

Пусть теперь A — произвольное полное множество. Если A содержит некоторое число $k \geqslant 2$, то по условию оно также содержит число $1 \cdot (k-1) = k-1$. Продолжая этот процесс, получаем, что все натуральные числа, не превосходящие k, лежат в A. В частности, если A не содержит чисел, больших 4, то множество A уже перечислено в ответе.

Пусть теперь в A есть число $\ell \geqslant 5$. Зададим последовательность $\ell_1, \ell_2, \ldots$ соотношениями $\ell_1 = \ell$, $\ell_{n+1} = 2(\ell_n - 2)$. Все эти числа лежат в A. Действительно, ℓ_1 лежит в A по нашему предположению, а если $\ell_n = 2+(\ell_n-2) \in A$, то и $\ell_{n+1} = 2(\ell_n-2) \in A$. Кроме того, $\ell_{n+1} = \ell_n + (\ell_n - 4)$; по индукции теперь получаем, что $\ell_{n+1} > \ell_n \geqslant 5$. Значит, для любого натурального n имеем $\ell_n > n$; из рассуждений предыдущего абзаца понимаем теперь, что и $n \in A$. Итак, все натуральные числа лежат в A.

Комментарий. Верный ответ — 1 балл.

Доказано, что вместе с любым числом полное множество содержит все меньшие его — 2 балла.

Доказано, что полное множество, в котором есть число, большее 4, содержит бесконечно много чисел — 2 балла.

В решении упущен один или несколько из ответов — не более 5 баллов.

9.7. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k *удачным*, если $k \leqslant 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными? *(Е. Бакаев)*

Ответ. 1008 чисел.

Решение. Рассмотрим произвольное окрашивание таблицы. Пусть нашлось хотя бы два удачных числа, и a — наименьшее из них, а b — наибольшее.

Поделим b на a с остатком: $b = qa+r$, где $0 \leqslant r < a$. Предположим, что $q \geqslant 2$. В произвольном квадрате $b\times b$ можно расположить q^2 непересекающихся квадратов $a\times a$. В этих квадратах будет ровно q^2a чёрных клеток. Однако $q^2a > (q+1)a > qa+r = b$; значит, в квадрате $b \times b$ будет больше, чем b чёрных клеток, что невозможно. Итак, $q < 2$, то есть $b < 2a$.

Общее количество удачных чисел не превосходит количества натуральных чисел от a до b, то есть оно не больше $b - a + 1 < b - b/2 + 1 = b/2 + 1 \leqslant 1009$. Значит, это количество не больше 1008.

Осталось привести пример раскраски, для которой найдутся 1008 удачных чисел. Окрасим чёрным все клетки 1008-й строки и только их. Рассмотрим произвольный квадрат со стороной $d \geqslant 1009$. Он пересекается с 1008-ой строкой, значит в нём есть целая строка отмеченных клеток, то есть их как раз d штук. Значит, все числа от 1009 до 2016 являются удачными, и таких чисел как раз 1008.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример с 1008 удачными числами — 2 балла.

Доказано только, что удачных чисел не больше 1008 — 4 балла.

9.8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90^\circ$. Пусть M — середина стороны BC. Оказалось. что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$. *(Е. Бакаев)*

Первое решение. На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку K так, что $AB = AK$ (см. рис. 1). Тогда AM — средняя линия в треугольнике BCK, откуда $AM \parallel CK$. Значит, $\angle BKC = \angle BAM = \angle ADC$. Отсюда следует, что четырёхугольник $AKDC$ вписан.

Опять же используя параллельность AM и CK, получаем $\angle CAM = \angle ACK = \angle ADK$. Наконец, DA — медиана и высо-

та в треугольнике BDK, поэтому DA является и биссектрисой; отсюда $\angle ADB = \angle ADK = \angle CAM$, что и требовалось доказать.

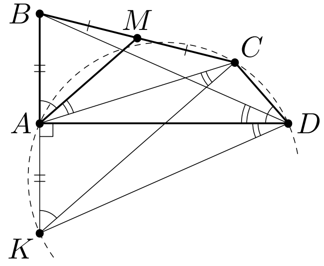

Рис. 1

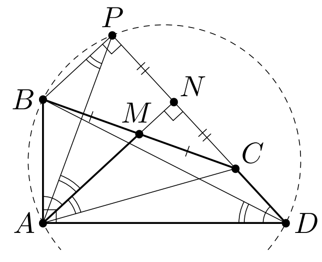

Рис. 2

Второе решение. Заметим, что $\angle ADC + \angle DAM = \angle BAM + \angle DAM = 90^\circ$; это значит, что $AM \perp CD$. Опустим перпендикуляры MN и BP из точек M и B на прямую CD; тогда точки A, M и N лежат на одной прямой (см. рис. 2).

Поскольку $BM = MC$, по теореме Фалеса получаем $PN = NC$. Значит, AN — высота и медиана в треугольнике APC, откуда $\angle CAM = \angle MAP$. Так как $BP \parallel AN$, получаем $\angle MAP = \angle APB$. Наконец, поскольку $\angle BPD = \angle BAD = 90^\circ$, четырёхугольник $ABPD$ вписан; поэтому $\angle APB = \angle ADB$. Итак, мы получили, что $\angle CAM = \angle MAP = \angle APB = \angle ADB$, что и требовалось.

Третье решение. Отложим на луче AM точку Q так, что $AQ = 2AM$ (см. рис. 3). Тогда в четырёхугольнике $ABQC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть он — параллелограмм; значит, $\angle CAQ = \angle AQB$.

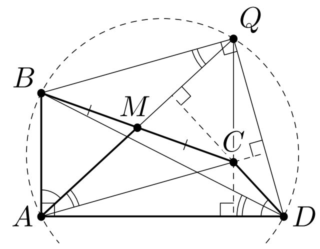

Рис. 3

Так как $QC \parallel AB$, получаем $QC \perp AD$. Так как $\angle QAD = 90^\circ - \angle BAQ = 90^\circ - \angle ADC$, имеем $DC \perp AQ$. Значит, C — точка пересечения высот в треугольнике AQD, откуда $AC \perp QD$ (и, значит, $BQ \perp QD$).

Поскольку $\angle BAD = \angle BQD = 90^\circ$, четырёхугольник $ABQD$ вписан. Значит, $\angle ADB = \angle AQB = \angle CAQ$, что и требовалось доказать.

10 класс

10.5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Такое множество одно: это множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Первое решение. Пусть A — полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент $a \in A$. Тогда $a + 0 = a \in A$, значит, $a \cdot 0 = 0 \in A$. Так как $(-x) + x = 0 \in A$, получаем теперь, что $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$ при всех действительных x. В силу произвольности выбора x отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству A.

Наконец, для любого $b > 0$ из того, что число $(-b) + (-b) = -2b$ лежит в A, получаем, что $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$. Значит, и произвольное положительное число также лежит в A. Итак, в A входят все действительные числа.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем произвольный элемент $s \in A$. Докажем, что любое $t \leqslant 0$ лежит в A. Рассмотрим уравнение $x^2 - sx + t = 0$; его дискриминант неотрицателен, так что оно имеет два (возможно, совпадающих) корня a и b. Тогда по теореме Виета имеем $a + b = t$ и $ab = s$. Поскольку $a + b = s \in A$, получаем, что и $t \in A$.

Осталось показать, что любое $u > 0$ также лежит в A. По доказанному выше, $(-u) + (-1) \in A$; значит, и $(-u) \cdot (-1) = u$ также лежит в A.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что полное множество содержит все отрицательные (или все неположительные) числа — 3 балла.

10.6. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Окружность, описанная около треугольника BIC, вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω. (*Б. Обухов*)

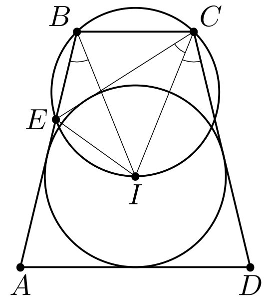

Рис. 4

Решение. Заметим, что I лежит на оси симметрии трапеции, поэтому $\angle ICD = \angle IBA$. Пользуясь вписанностью четырехугольника $CBEI$, получаем $\angle ICD = \angle IBA = \angle IBE = \angle ICE$. Так как прямая CD касается окружности ω, то и прямая CE, симметричная ей относительно CI, также касается ω.

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием равенств $\angle IEA = \angle ICB = \angle IBC = \angle IEC$.

Комментарий. Показано, что точка I лежит на оси симметрии трапеции, или эквивалентные продвижения — 0 баллов.

10.7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах. (*Н. Власова*)

Решение. Заметим сразу, что на *любой* дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков.

Пусть D — девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ так, что K_1 — это D, и продолжим нумерацию циклически (например, $K_0 = K_{2n}$ и $K_{2n+1} = K_1$). При $i = 1, 2, \ldots, 2n$ обозначим через d_i разность между количествами девочек и мальчиков среди $K_1, K_2, \ldots, K_i$; в частности, $d_1 = 1 - 0 = 1$ и $d_{2n} = 0$ (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая $d_{2n+1} = d_1$ и т. д.). Девочка D образует с K_i хорошую пару тогда и только тогда, когда $d_i = 0$ и K_i — мальчик, т. е. $d_i = 0$ и $d_{i-1} = 1$. Итак, найдутся ровно 10 индексов i с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика $M = K_s$, образующего с D хорошую пару; тогда $d_s = 0$ и $d_{s-1} = 1$. Аналогично получаем, мальчик M образует хорошую пару с K_i ровно тогда, когда $d_s = d_{i-1}$ и K_i — девочка (то есть $d_{i-1} = 0$ и $d_i = 1$).

Заметим, что любые два числа d_i и d_{i+1} отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не бо́льших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке «переходов» из первых групп во вторые будет столько же, сколько и «переходов» из вторых групп в первые. Значит, у M столько же хороших напарниц, сколько у D хороших напарников. Это и требовалось доказать.

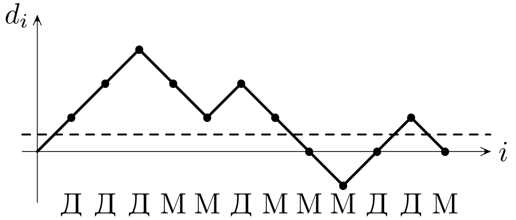

Рис. 5

Замечание 1. Это решение можно визуализировать, нарисовав «график» последовательности (d_i) (см. рис. 5). Тогда появление хорошего напарника у D означает, что график пересекает прямую $d = 1/2$ сверху вниз, а появление хорошей напарницы у M — пересечение той же прямой снизу вверх.

Замечание 2. Из решения следует, что, если девочка образует хорошую пару с двумя мальчиками, то любая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её и с другим. Более того, все дети разбиваются на непересекающиеся группы (в каждой группе поровну мальчиков и девочек) так, что каждый мальчик образует хорошие пары со всеми девочками из своей группы и только с ними, и то же верно для любой девочки. При этом, при обходе по кругу мальчики и девочки из одной группы чередуются.

Существуют решения, доказывающие этот факт напрямую (например, индукцией по числу детей).

10.8. Найдите все пары различных действительных чисел x и y такие, что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x-y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x-y)$.

(*И. Богданов*)

Ответ. $(x, y) = (2, 0)$ и $(x, y) = (0, 2)$.

Решение. Для удобства сделаем замену $x = 2a$ и $y = 2b$. Тогда из условия имеем $(2a)^{100} - (2b)^{100} = 2^{99} \cdot (2a - 2b)$ и

$(2a)^{200} - (2b)^{200} = 2^{199} \cdot (2a - 2b)$. Сократив оба равенства на степени двойки, получаем $a^{100} - b^{100} = a^{200} - b^{200} = a - b \neq 0$. Поделив второе выражение на первое, получаем $a^{100} + b^{100} = 1$; значит, каждое из чисел a и b по модулю не превосходит 1.

Если $b = 0$, то $a^{100} = a$, откуда $a = 1$. Аналогично, если $a = 0$, то $b = 1$; это приводит к двум ответам $(x, y) = (2, 0)$ и $(x, y) = (0, 2)$.

Пусть теперь $ab \neq 0$; тогда $|a|, |b| < 1$. Заметим, что значения функции $f(x) = x^{100} - x = x(x^{99} - 1)$ положительны при $x \in (-1, 0)$ и отрицательны при $x \in (0, 1)$. Поскольку $a^{100} - b^{100} = a - b$, имеем $f(a) = f(b)$, поэтому числа a и b имеют одинаковый знак.

С другой стороны,

$$1 = \frac{a^{100} - b^{100}}{a - b} = a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \ldots + b^{99}. \qquad (*)$$

Если a и b отрицательны, то правая часть в $(*)$ также отрицательна, что невозможно. Если же a и b положительны, то все слагаемые в правой части $(*)$ положительны, поэтому она больше, чем $a^{99} + b^{99}$; итак, $a^{99} + b^{99} < 1$. С другой стороны, поскольку $0 < |a|, |b| < 1$, имеем $a^{99} + b^{99} > a^{100} + b^{100} = 1$. Противоречие.

Замечание. После получения неравенства $(*)$ решение можно завершить разными способами — например, с использованием неравенства

$$(a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \ldots + b^{99})^{100} > (a^{100} + b^{100})^{99},$$

справедливого при $ab > 0$. Это неравенство можно доказать, раскрыв скобки и установив, что коэффициент при любом одночлене слева не меньше, чем коэффициент при таком же одночлене справа.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Переход от чисел x и y к числам $a = x/2$ и $b = y/2$ — 0 баллов.

Доказано, что ненулевые числа x и y не могут иметь разные знаки — 3 балла.

Доказано, что ненулевые числа x и y не могут иметь один знак — 3 балла.

11 класс

11.5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(Н. Агаханов)

Ответ. Такое множество одно: это множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Первое решение. Пусть A — полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент $a \in A$. Тогда $a + 0 = a \in A$, значит, $a \cdot 0 = 0 \in A$. Так как $(-x) + x = 0 \in A$, получаем теперь, что $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$ при всех действительных x. В силу произвольности выбора x отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству A.

Наконец, для любого $b > 0$ из того, что число $(-b) + (-b) = -2b$ лежит в A, получаем, что $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$. Значит, и произвольное положительное число также лежит в A. Итак, в A входят все действительные числа.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем произвольный элемент $s \in A$. Докажем, что любое $t \leqslant 0$ лежит в A. Рассмотрим уравнение $x^2 - sx + t = 0$; его дискриминант неотрицателен, так что оно имеет два (возможно, совпадающих) корня a и b. Тогда по теореме Виета имеем $a + b = t$ и $ab = s$. Поскольку $a + b = s \in A$, получаем, что и $t \in A$.

Осталось показать, что любое $u > 0$ также лежит в A. По доказанному выше, $(-u) + (-1) \in A$; значит, и $(-u) \cdot (-1) = u$ также лежит в A.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что полное множество содержит все отрицательные (или все неположительные) числа — 3 балла.

11.6. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек. *(А. Кузнецов)*

Ответ. $1008^2 = 1\,016\,064$ точек.

Решение. Пусть среди сфер есть r красных и $2016 - r$ зелёных. Так как у любых двух сфер максимум одна точка касания, количество синих точек не превосходит $r(2016 - r) = 1008^2 - (1008 - r)^2 \leqslant 1008^2$.

Предъявим пример с таким количеством синих точек. Пусть ℓ — некоторая прямая, α — плоскость, перпендикулярная ℓ и пересекающая её в точке O, а ω — окружность с центром O и радиусом 1, лежащая в α. Построим 1008 красных сфер одинакового радиуса $r < 1$ с различными центрами $R_1, R_2, \ldots, R_{1008}$, лежащими на ω.

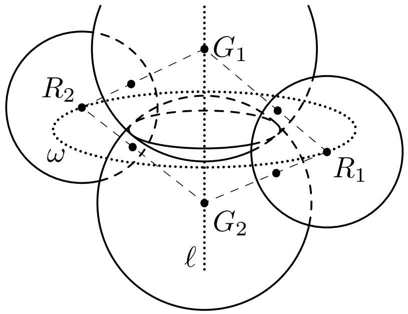

Рис. 6

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_{1008}$ — различные точки на ℓ, удалённые от O на расстояния $d_1, d_2, \ldots, d_{1008}$. Тогда расстояние между G_i и любой точкой R_j равно $\sqrt{1 + d_i^2}$. Значит, если мы построим зелёную сферу с центром G_i и радиусом $\sqrt{1 + d_i^2} - r$, она будет касаться всех синих сфер. При этом все точки касания будут попарно различными, поскольку они лежат на отрезках вида R_jG_i, которые не имеют общих точек, кроме концов. Значит, в нашей конструкции действительно будут отмечены 1008^2 синих точек.

Замечание. Все красные сферы в этом примере получаются друг из друга вращением вокруг прямой ℓ. Поэтому, если зелёная сфера, центр которой лежит на ℓ, касается одной красной сферы, то она касается и всех красных сфер.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только доказательство того, что синих точек не больше, чем $1008^2 - 1$ балл.

Верный пример без доказательства оптимальности — 5 баллов.

11.7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах. (*Н. Власова*)

Решение. Заметим сразу, что на *любой* дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков.

Пусть D — девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ так, что K_1 — это D, и продолжим нумерацию циклически (например, $K_0 = K_{2n}$ и $K_{2n+1} = K_1$). При $i = 1, 2, \ldots, 2n$ обозначим через d_i разность между количествами девочек и мальчиков среди $K_1, K_2, \ldots, K_i$; в частности, $d_1 = 1 - 0 = 1$ и $d_{2n} = 0$ (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая $d_{2n+1} = d_1$ и т. д.). Девочка D образует с K_i хорошую пару тогда и только тогда, когда $d_i = 0$ и K_i — мальчик, т. е. $d_i = 0$ и $d_{i-1} = 1$. Итак, найдутся ровно 10 индексов i с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика $M = K_s$, образующего с D хорошую пару; тогда $d_s = 0$ и $d_{s-1} = 1$. Аналогично получаем, мальчик M образует хорошую пару с K_i ровно тогда, когда $d_s = d_{i-1}$ и K_i — девочка (то есть $d_{i-1} = 0$ и $d_i = 1$).

Заметим, что любые два числа d_i и d_{i+1} отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не бо́льших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке «переходов» из первых групп во вторые будет столько же, сколько и «переходов» из вторых групп в первые. Значит, у M столько же хороших напарниц, сколько у D хороших напарников. Это и требовалось доказать.

Замечание 1. Это решение можно визуализировать, нарисовав «график» последовательности (d_i) (см. рис. 7). Тогда

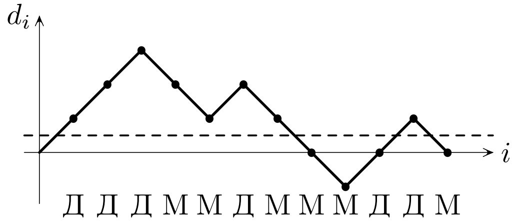

Рис. 7

появление хорошего напарника у D означает, что график пересекает прямую $d = 1/2$ сверху вниз, а появление хорошей напарницы у M — пересечение той же прямой снизу вверх.

Замечание 2. Из решения следует, что, если девочка образует хорошую пару с двумя мальчиками, то любая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её и с другим. Более того, все дети разбиваются на непересекающиеся группы (в каждой группе поровну мальчиков и девочек) так, что каждый мальчик образует хорошие пары со всеми девочками из своей группы и только с ними, и то же верно для любой девочки. При этом, при обходе по кругу мальчики и девочки из одной группы чередуются.

Существуют решения, доказывающие этот факт напрямую (например, индукцией по числу детей).

11.8. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных? (*А. С. Голованов*)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Приведём пример числа N, для которого все указанные числа будут различными. Положим

$$N = (3^2 - 2^2)^{105}(3^3 - 2^3)^{70}(3^5 - 2^5)^{126}(3^7 - 2^7)^{120}.$$

Тогда

$$N = M_2^2(3^2 - 2^2) = M_3^3(3^3 - 2^3) = M_5^5(3^5 - 2^5) = M_7^7(3^7 - 2^7)$$

при некоторых натуральных M_2, M_3, M_5 и M_7, не делящихся ни на 2, ни на 3. Отсюда

$N = (3M_2)^2 - (2M_2)^2 = (3M_3)^3 - (2M_3)^3 =$

$$= (3M_5)^5 - (2M_5)^5 = (3M_7)^7 - (2M_7)^7.$$

Даже все восемь чисел, участвующих в представлениях, различны, поскольку у любых двух из них разная степень вхождения либо двойки, либо тройки.

Замечание. Подобный пример можно построить из следующих соображений (все упоминающиеся числа — натуральные). Рассмотрим какие-нибудь числа вида $K_2 = x_1^2 - x_2^2$, $K_3 = y_1^3 - y_2^3$, $K_5 = z_1^5 - z_2^5$ и $K_7 = t_1^7 - t_2^7$. Чтобы, скажем, получить число, представимое в виде разности как третьих, так и пятых степеней, достаточно взять число, имеющее вид K_3A^3 и одновременно K_5B^5. Значит, подойдёт число вида $K_3^\alpha K_5^\beta$, где α делится на 5 и даёт остаток 1 при делении на 3, а β делится на 3 и даёт остаток 1 при делении на 5.

Аналогично, чтобы получить число, требуемое в задаче, достаточно взять число $K_2^{\alpha_2}K_3^{\alpha_3}K_5^{\alpha_5}K_7^{\alpha_7}$, где α_2 даёт остаток 1 при делении на 2 и делится на $3 \cdot 5 \cdot 7$, а остальные показатели обладают аналогичными свойствами. Доказать существование таких показателей можно разными способами — в частности, неконструктивно, с использованием китайской теоремы об остатках. После этого нужно ещё проверить, что полученные степени различны.

Комментарий. Приведён (возможно, неконструктивно) пример требуемого числа, но не обосновано, что все полученные степени различны — не менее 4 баллов.

Содержание