Всероссийская ассоциация учителей математики
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства города Москвы
Республиканская естественно-математическая школа

I конкурс учителей математики Юга России

Майкоп, Республика Адыгея, 20 октября 2018 года

Ответы, решения, комментарии, критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов

I. Решите задачи.

1. Оценка за четверть. За контрольную можно получить одну из оценок: «2», «3», «4» или «5». Оценка за четверть равна среднему арифметическому восьми оценок за контрольные работы, округленному до ближайшего целого числа по правилам округления (например, 2,5 округляется до «3»). По результатам четверти у Васи выходила оценка «3». Вася утверждает, что он сможет переписать три контрольные так, чтобы получить за четверть оценку «5». Может ли это быть правдой?

Ответ: может.

Решение. Пусть, например, сначала Вася получил оценки: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5. Тогда его средняя оценка равна 27 : 8 < 3,5, Поэтому в четверти выходила оценка «3». Если он перепишет первые три контрольные на «5», то его средняя оценка станет 36 : 8 = 4,5. Значит, в четверти выйдет оценка «5».

М. Евдокимов, XXIII турнир математических боев имени А.П. Савина

<u>Критерии проверки</u>.

Приведены верный ответ и верный пример – 10 баллов

Приведен верный пример, но допущена вычислительная ошибка, не повлиявшая на ответ – 5 баллов

Приведен только ответ – 0 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

2. Сумма. Можно ли число 2018 представить в виде суммы 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр?

Ответ: нельзя.

Решение. У каждого слагаемого одна и та же сумма цифр, поэтому их остатки от деления на 3 одинаковы. Сумма 99 одинаковых остатков делится на 3, значит и сумма любых 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр, делится на 3. Но число 2018 на 3 не делится.

А. Шаповалов, XX турнир математических боев имени А.П. Савина, вариация

<u>Критерии проверки</u>.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Присутствует верная идея рассмотрения остатков, но решение не доведено до конца – 3 балла

Приведен только ответ – 0 баллов

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

3. Короли на доске. Из доски размером 8×8 вырезали 4 угловые клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга королей можно поставить на получившуюся доску?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что больше, чем 16 королей, не бьющих друг друга, на шахматную доску поставить нельзя, даже если не вырезать из нее угловые клетки. Действительно, в любой квадрат размером 2×2 можно поставить не более одного короля, а доска 8×8 разбивается на 16 таких квадратов.

Пример расстановки шестнадцати королей – см. рис. 3.

Существуют и другие примеры.

Е. Бакаев, XXII турнир математических боев имени А.П. Савина

						К	
К		**К**		**К**			
						К	
К		**К**		**К**			
						К	
К		**К**		**К**			
							К
	К		**К**		**К**		

Рис. 3

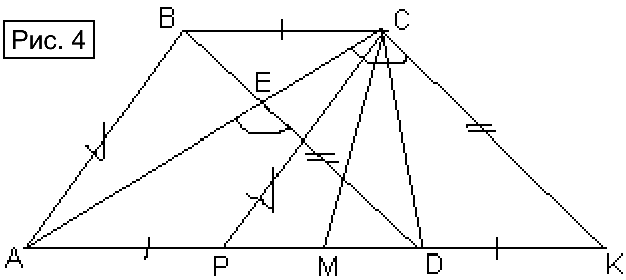
Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведены только верный ответ и верный пример – 4 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

4. Тупой угол. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* диагонали пересекаются в точке *E*. Докажите, что если трапеция описанная, то угол *AED* – тупой.

Решение. Рассмотрим данную трапецию *ABCD*. Через вершину *C* проведем прямую, параллельную диагонали *BD*, которая пересечет *AD* в точке *K*, и прямую, параллельную стороне *AB*, которая пересечет *AD* в точке *P* (см. рис. 4). Тогда *AB* = *CP*, *BD* = *CK* и ∠*AED* = ∠*ACK*.

Рис. 4



Далее проведем медиану *CM* треугольника *ACK*. Так как *AP* = *BC* = *DK*, то *CM* является и медианой треугольника *PCD*. Следовательно, $CM < \dfrac{CP+CD}{2} = \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{AD+BC}{2} = \dfrac{AK}{2}$, так как данная трапеция – описанная.

Рассмотрим окружность с диаметром *AK*. Точка *M* – ее центр и $CM < \dfrac{AK}{2}$, поэтому, точка *C* лежит внутри этой окружности, следовательно ∠*ACK* – тупой, значит, и ∠*AED* – тупой, что и требовалось.

Фольклор

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Присутствует верные идеи дополнительных построений, но решение не доведено до конца – 3 балла
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок.

В заданиях №№5 – 8 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение. Отдельно укажите, верен ли «ответ».

5. Собственные делители. «Задача». Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в 7 раз больше самого маленького собственного делителя.

«Ответ»: все натуральные числа вида $7q^2$, где *q* – простое число.

«Решение». Наименьший собственный делитель любого натурального числа – простое число, иначе оно не наименьшее. Если *m* – наибольший, а *q* – наименьший собственный делитель числа *N*, то *N* = *mq*. По условию *m* = 7*q*, значит, $N = 7q^2$.

Комментарий. Указанный «ответ» верным не является. Несложно привести контрпример: у числа $7\cdot 11^2$ наибольший собственный делитель 121, а наименьший – 7. При этом, $121 : 7 \neq 7$. Отсюда понятна ошибка в «решении»: приведенное рассуждение верно только для случаев, когда наименьший собственный делитель не превосходит 7.

Таким образом, q = 2; 3; 5; 7. Верный **ответ**: 28; 63; 175; 343.

Предложил А. Грибалко

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Указано, что «ответ» неверный – 1 балл
Приведен контрпример – 3 балла
Верно объяснена ошибка в «решении» – 3 балла
Приведен верный ответ – 3 балла

6. Кубические корни. «Задача». Докажите, что $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

«Решение». Возведем обе части равенства в куб, используя формулу куба разности, которую удобно записать так: $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$. Получим: $\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)-\sqrt{5}+2=1$. Используя формулу разности квадратов и заменяя $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ на 1, приходим к верному равенству: 4 – 3 = 1.

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «решение» неверное. Из того, что получено верное равенство, вообще говоря, не следует, что верно исходное равенство. Для того, чтобы подобный вывод был верным, требуется, чтобы все преобразования сохраняли равносильность. В приведенном «решении» это не так: замена разности кубических корней на 1 неправомерна, так как именно равенство этих выражений и доказывается.

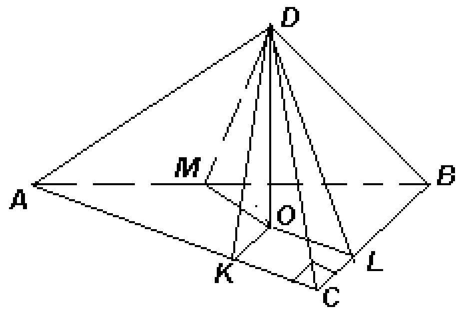
Приведем верное решение. Пусть $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = x$, тогда, возведя в куб, получим: $\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)-\sqrt{5}+2 = x^3$. Упрощая и заменяя $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ на x, приходим к уравнению $x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) + (3x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, что и требовалось.

Предложил Ю. Блинков

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Указано, что условие корректно, а «решение» неверное – 1 балл
Верно указана ошибка в «решении» – 2 балла
Верно объяснена суть допущенной ошибки в «решении» – 2 балла
Приведено верное решение – 5 баллов

7. Пирамида. «Задача». Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Плоскость каждой боковой грани образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

«Ответ»: $\sqrt{3}$.



«Решение». Пусть $DABC$ – данная пирамида, где $\angle ACB = 90°$, $AC = 4$, $BC = 3$, DO – ее высота (см. рисунок). Из точки O проведем перпендикуляры к сторонам треугольника ABC: OK, OL и OM, тогда, по теореме о трех перпендикулярах, $DK \perp AC$, $DL \perp BC$ и $DM \perp AB$. Следовательно, углы DKO, DLO и DMO – линейные углы двугранных углов при ребрах основания пирамиды. Из условия задачи следует, что эти углы равны по 60°. Тогда равны прямоугольные треугольники DKO, DLO и DMO (по катету и острому углу), следовательно, $OK = OL = OM$, то есть, O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а эти отрезки – ее радиусы. Найдем радиус r вписанной окружности: $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = 1$. Из прямоугольного треугольника DOK: $DO = r\cdot \mathrm{tg}60° = \sqrt{3}$.

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «решение» и «ответ» неверные. При этом, сами по себе рассуждения ошибок не содержат, но рассмотрен только один возможный случай. Если плоскости боковых граней образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды может проектироваться не только в центр вписанной в основание окружности, но и в центры его вневписанных окружностей (*окружностей, которые касаются стороны треугольника и продолжений двух других сторон*). Рассуждения, доказывающие этот факт, аналогичны тем, которые приведены в «решении» при условии, что высота пирамиды лежит вне ее.

Таким образом, возможны еще три случая. Для вычисления радиусов вневписанных окружностей удобно использовать формулу: $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, где p и S – полупериметр и площадь треугольника соответственно, a – длина той стороны, которой касается эта вневписанная окружность. Так как $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$ = 6, $p = \dfrac{AC + BC + AB}{2}$ = 6, то радиусы вневписанных окружностей равны 2, 3 и 6. Соответствующие значения высоты пирамиды: $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$.

Предложил А. Блинков

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).

Указано, что условие «задачи» корректно и что рассуждения в «решении» сами по себе ошибок не содержат – 2 балла

Указано, что возможны другие случаи и объяснено, какие именно и почему – 3 балла

Приведены верные вычисления для остальных случаев – 5 баллов

8. Законопроект. «Задача». В марсианском парламенте заседают депутаты трёх партий: «Гласные», «Согласные» и «Шипящие» причём в каждой фракции по 50 человек. На голосование был поставлен проект закона «О реконструкции марсианских каналов». После голосования по 30 депутатов от каждой партии сказали, что они проголосовали «за», по 10 сказали, что проголосовали «против», а остальные сказали, что воздержались. Известно, из «согласных» депутатов сказали правду те и только те, кто поддержал законопроект, из «гласных» – те и только те, кто проголосовал против, а из «шипящих» – воздержавшиеся. Законопроект считается принятым, если за него подано не менее 50% голосов. Был ли принят законопроект?

«Ответ»: нет.

«Решение». Из «гласных» сказать, что они проголосовали «за» могли только те, кто воздержался, а таких не более, чем 10. Из «шипящих» сказать, что они проголосовали «за», могли только те, кто проголосовал «против», а их также не более, чем 10. Значит, даже, если все «согласные» проголосовали «за», то закон поддержали не более, чем 50 + 10 + 10 = 70 депутатов. А надо, как минимум, 75.

Комментарий. Приведен верный ответ, но «решение» неверное. Неправда, что «за» могли проголосовать только те «Шипящие», кто, по их словам, голосовал «против». «Шипящий», проголосовавший «за», мог сказать, что он воздержался. Тогда оценка поддержавших закон, проведенная по той же схеме, даст 10 + 10 + 10 + 50 = 80 > 75.

Приведем верное решение. Те депутаты из «Гласных» или «Шипящих», кто голосовал «за», врали, то есть ответили, что голосовали «против» или воздержались. В обеих партиях так ответили всего по 20 человек. Даже если все ответившие так проголосовали «за», то это не более 40 человек. Те из «Согласных», кто голосовал «за», говорили правду, то есть. ответили, что голосовали «за». В партии «Согласные» так ответили 30 человек. Значит, суммарно по трём партиям «за» проголосовало не более, чем 70 человек. А 50% голосов – это 75 человек, поэтому законопроект не был принят.

Предложил А. Шаповалов

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).

Указано, что приведенный «ответ» верный – 1 балл

Указано неверное утверждение в «решении» – 1 балл

Объяснено, почему эта ошибка могла привести к другому ответу – 3 балла

Приведено верное решение – 5 баллов