Всероссийская ассоциация учителей математики
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства города Москвы
Республиканская естественно-математическая школа

I конкурс учителей математики Юга России

Майкоп, Республика Адыгея, 20 октября 2018 года

Уважаемые коллеги!

1. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно четко указать номер задания (переписывать условия не надо).
2. Первая половина тетради является чистовиком, вторая половина тетради является черновиком.
3. Вам предлагаются два блока заданий:
   №1 – №4. «Математический» (задачи для решения).
   №5 – №8. «Методический» (задания, моделирующие повседневную работу учителя).
4. Продолжительность конкурса – 4 часа.

Желаем успеха!

I. Решите задачи.

1. Оценка за четверть. За контрольную можно получить одну из оценок: «2», «3», «4» или «5». Оценка за четверть равна среднему арифметическому восьми оценок за контрольные работы, округленному до ближайшего целого числа по правилам округления (например, 2,5 округляется до «3»). По результатам четверти у Васи выходила оценка «3». Вася утверждает, что он сможет переписать три контрольные так, чтобы получить за четверть оценку «5». Может ли это быть правдой?

2. Сумма. Можно ли число 2018 представить в виде суммы 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр?

3. Короли на доске. Из доски размером 8×8 вырезали 4 угловые клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга королей можно поставить на получившуюся доску?

4. Тупой угол. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке E. Докажите, что если трапеция описанная, то угол AED – тупой.

II. Методический блок.

В заданиях №№5 – 8 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение. Отдельно укажите, верен ли «ответ».

5. Собственные делители. «Задача». Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в 7 раз больше самого маленького собственного делителя.

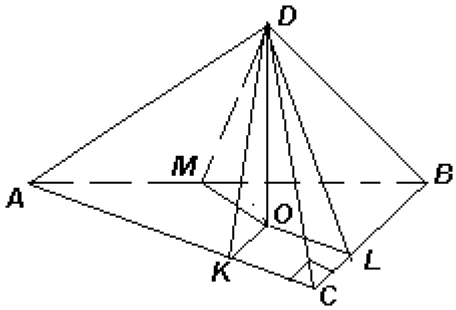
«Ответ»: все натуральные числа вида $7q^2$, где q – простое число.

«Решение». Наименьший собственный делитель любого натурального числа – простое число, иначе оно не наименьшее. Если m – наибольший, а q – наименьший собственный делитель числа N, то $N = mq$. По условию $m = 7q$, значит, $N = 7q^2$.

6. Кубические корни. «Задача». Докажите, что $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ = 1.

«Решение». Возведем обе части равенства в куб, используя формулу куба разности, которую удобно записать так: $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$. Получим: $\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)-\sqrt{5}+2=1$. Используя формулу разности квадратов и заменяя $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ на 1, приходим к верному равенству: 4 – 3 = 1.

7. Пирамида. «Задача». Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Плоскость каждой боковой грани образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите высоту пирамиды.



«Ответ»: $\sqrt{3}$.

«Решение». Пусть *DABC* – данная пирамида, где $\angle ACB$ = 90°, *AC* = 4, *BC* = 3, *DO* – ее высота (см. рисунок). Из точки *O* проведем перпендикуляры к сторонам треугольника *ABC*: *OK*, *OL* и *OM*, тогда, по теореме о трех перпендикулярах, $DK \perp AC$, $DL \perp BC$ и $DM \perp AB$. Следовательно, углы *DKO*, *DLO* и *DMO* – линейные углы двугранных углов при ребрах основания пирамиды. Из условия задачи следует, что эти углы равны по 60°. Тогда равны прямоугольные треугольники *DKO*, *DLO* и *DMO* (по катету и острому углу), следовательно, *OK* = *OL* = *OM*, то есть, *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*, а эти отрезки – ее радиусы. Найдем радиус *r* вписанной окружности: $r=\dfrac{AC+BC-AB}{2}$ = 1. Из прямоугольного треугольника *DOK*: $DO = r \cdot \mathrm{tg}60° = \sqrt{3}$.

8. Законопроект. «Задача». В марсианском парламенте заседают депутаты трёх партий: «Гласные», «Согласные» и «Шипящие» причём в каждой фракции по 50 человек. На голосование был поставлен проект закона «О реконструкции марсианских каналов». После голосования по 30 депутатов от каждой партии сказали, что они проголосовали «за», по 10 сказали, что проголосовали «против», а остальные сказали, что воздержались. Известно, из «согласных» депутатов сказали правду те и только те, кто поддержал законопроект, из «гласных» – те и только те, кто проголосовал против, а из «шипящих» – воздержавшиеся. Законопроект считается принятым, если за него подано не менее 50% голосов. Был ли принят законопроект?

«Ответ»: нет.

«Решение». Из «гласных» сказать, что они проголосовали «за» могли только те, кто воздержался, а таких не более, чем 10. Из «шипящих» сказать, что они проголосовали «за», могли только те, кто проголосовал «против», а их также не более, чем 10. Значит, даже, если все «согласные» проголосовали «за», то закон поддержали не более, чем 50 + 10 + 10 = 70 депутатов. А надо, как минимум, 75.