Всероссийская ассоциация учителей математики
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства города Москвы
Республиканская естественно-математическая школа

Ответы, решения, комментарии, критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов

I. Решите задачи.

№1. Тир. Коля стрелял в тире. Если он попадал в цель, то ему давали еще 3 дополнительных патрона. А если он попадал в цель два раза подряд, то за второе попадание ему давали 4 патрона. Сначала Коле дали 15 патронов, он сделал 44 выстрела, и патроны у него закончились. Сколько раз Коля попал в цель, если три раза подряд он не попал ни разу?

Н. Нетрусова (по мотивам фольклора)

Ответ: 9 раз.

Решение. Первый способ. Всего Коля получил 44 – 15 = 29 дополнительных патронов. За каждый успешный выстрел он получал 3 патрона, и еще один, если этот выстрел был повторным попаданием. Значит, всего Коля попал в цель $\frac{29-t}{3}$ раза, где t – количество повторных попаданий.

Для того, чтобы полученная дробь принимала натуральные значения, число t должно давать остаток 2 при делении на 3. Кроме того, $t < 5$, иначе количество попаданий будет не больше восьми, из которых повторных – не больше четырёх.

Таким образом, $t = 2$, поэтому в цель Коля попал 9 раз.

Второй способ. Пусть x – количество первых попаданий, за которое Коля получил $3x$ дополнительных патронов. После каких-то из этих x выстрелов последовало y попаданий в цель и Коля получил ещё $4y$ патронов. Так как всего было истрачено 44 патрона, то $15+3x+4y=44$, откуда $3x+4y=29$.

Учитывая, что x и y – натуральные числа, причём $x \geq y$, получим: $5 \leq x \leq 9$. Кроме того, x – нечётное число. Подстановкой x = 5; 7; 9; находим единственное решение полученного уравнения: $x = 7$; $y = 2$. Тогда искомое количество попаданий – это $x + y = 9$.

Возможны также похожие рассуждения, в которых в качестве переменных выбраны количество одиночных попаданий и количество двойных.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов

Верно составлено выражение для количества попаданий в цель (первый способ) или уравнение (второй способ), но дальнейших продвижений нет или в них допущены ошибки – 3 балла

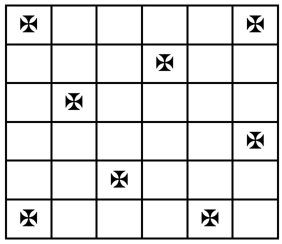
Приведен только верный ответ – 1 балл

№2. Социальная дистанция. Тюрьма страны Лилипутия имеет форму квадрата со стороной 4,2 метра, разделённого на одинаковые квадратные камеры (клетки) размером 70 см х 70 см. Какое наибольшее количество заключённых можно в неё посадить, соблюдая социальную дистанцию (расстояние между центрами занятых камер должно быть не меньше, чем 1,5 метра)?

А. Блинков

Ответ: 8 заключённых.

Рис. 2



Решение. Оценка. Расстояние между центрами двух соседних по стороне камер равно 0,7 м, а между двумя камерами с общей вершиной – $0{,}7\sqrt{2}$ м. Расстояние между центрами двух камер, находящихся в одной горизонтали (вертикали), расположенными через одну, равно 1,4 м. Во всех перечисленных случаях указанное расстояние меньше, чем 1,5 м, поэтому в такие две камеры можно посадить не более одного лилипута (иначе социальная дистанция не будет соблюдена).

Таким образом, ближайшие две камеры, которые можно заполнить, это расположенные на «расстоянии хода коня» между их центрами ($0{,}7\sqrt{5} > 0{,}7\cdot 2{,}2 = 1{,}54$ м) или на одной диагонали через одну ($1{,}4\sqrt{2} > 1{,}96$ м). Перебором убеждаемся, что в любом квадрате размером 3×3 могут находиться не более двух заключённых. Так как размер тюрьмы – это 6×6 клеток, а такой квадрат разбивается на 4 квадрата со стороной 3, то в ней можно разместить не более восьми лилипутов.

Пример. См. рис. 2.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов

Приведена только верная оценка – 5 баллов

Приведены верный ответ и пример – 3 балла

Приведен только верный ответ – 1 балл

№3. Параметр. При каких значениях параметра b найдется такое значение параметра α, что уравнение $|x - 3\cos\alpha| + |x - 4\sin\alpha| = b$ имеет бесконечно много решений?

Д. Шноль

Ответ: при всех $b \in [0; 5]$.

Решение. Равенство вида $|x - m| + |x - n| = b$ означает, что на координатной прямой сумма расстояний от точки с координатой x до точек с координатами m и n равна числу b. Следовательно, данное уравнение имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда расстояние между m и n равно b. В этом случае, точка x является любой точкой отрезка с концами m и n.

Таким образом, для выполнения условия задачи, необходимо и достаточно, чтобы $|3\cos\alpha - 4\sin\alpha| = b \Leftrightarrow |5\cos(\arccos 0{,}6 + \alpha)| = b$. Множеством значений левой части этого равенства является $[0; 5]$, поэтому условие задачи выполняется для всех значений b из этого отрезка.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено полное обоснованное, но нерациональное решение (рассматривается несколько случаев) – 9 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов

Верный ответ получен, но в решении есть существенные логические или технические ошибки – 5 баллов

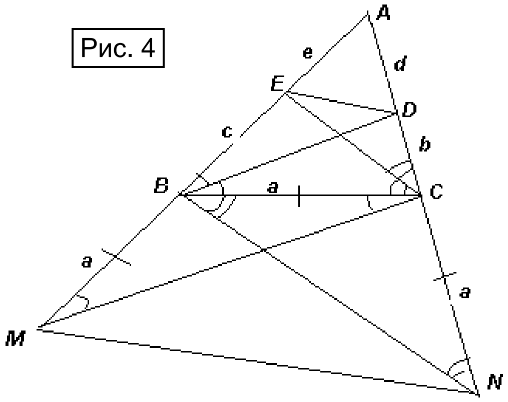
Приведен только верный ответ – 1 балл

№4. Параллельность. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *BD* и *CE*. На продолжении стороны *AB* за точку *B* отмечена точка *M*, а на продолжении *AC* за точку *C* – точка *N* так, что *BM* = *BC* = *CN*. Докажите, что прямые *DE* и *MN* параллельны.

Олимпиада «Балтийский путь», 2016 г.

Решение. Так как треугольник *MBC* – равнобедренный, то биссектриса *BD* его внешнего угла параллельна его основанию *MC* (см. рис. 4). Аналогично, *CE* || *NB*. Тогда, по теореме о пропорциональных отрезках получим два равенства: $\frac{AB}{BM}=\frac{AD}{DC}$ и $\frac{AC}{CN}=\frac{AE}{EB}$.

Рис. 4



Введём обозначения длин отрезков так, как показано на рисунке. Получим: $\frac{c+e}{a}=\frac{d}{b}$ $\Leftrightarrow$ $bc+be=ad$ и $\frac{b+d}{a}=\frac{e}{c}$ $\Leftrightarrow$ $bc+cd=ae$. Вычтем из второго равенства первое: $cd-be=ae-ad \Leftrightarrow d(a+c)=e(a+b) \Leftrightarrow \frac{a+b}{d}=\frac{a+c}{e}$.

Таким образом, $\frac{DN}{DA}=\frac{EM}{EA}$, тогда по обратной теореме о пропорциональности отрезков *DE* || *MN*.

При желании можно в обоих случаях обойтись без теорем о пропорциональности отрезков. Исходные пропорции можно вывести из свойства биссектрисы треугольника с учетом равенства отрезков в условии. Для заключительного вывода достаточно прибавить по 1 к обеим частям полученного равенства, тогда $\frac{AN}{AD}=\frac{AM}{AE}$ *и параллельность DE и MN будет следовать из равенства соответственных углов в подобных треугольниках ADE и AMN (см. рис. 4).*

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов

Верно и обоснованно получены исходные пропорции, но дальнейших продвижений нет или в них допущены ошибки – 3 балла

II. Методический блок.

В заданиях №5 – №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так, а если оно корректно, то укажите это. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а также укажите недочёты «решения» (если они есть). Затем приведите верное решение.

№5. Квадрат. «Задача». Докажите, что квадрат натурального числа при делении на 4 не может давать остаток 3.

«Решение». Квадраты натуральных чисел являются ординатами точек параболы $y = x^2$ с целыми абсциссами. Натуральные числа, которые дают остаток 3 при делении на 4 являются ординатами точек прямой $y = 4x + 3$ с целыми абсциссами. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то $x^2 = 4x + 3$. Но это уравнение не имеет целых корней.

В. Литцман, Ф. Трир. Где ошибка? Петроград, «Научное издательство», 1919.

Комментарий. Условие «задачи» корректно, так как доказываемое утверждение верно. При этом, приведено неверное «решение»: ниоткуда не следует, что значения выражений x^2 è $4x + 3$ должны достигаться при одних и тех же значениях переменной *x*. Более того, это неверно. Кроме того, даже если бы составленное уравнение имело целые корни, то не более двух. А если бы указанные числа существовали, то их бы было бесконечно много. Кроме того, неверно, что «Натуральные числа, которые дают остаток 3 при делении на 4 являются ординатами точек прямой $y = 4x + 3$ с целыми абсциссами», так речь идёт о натуральных числах, то есть выражение .$4x + 3$ можно рассматривать только при натуральных значениях *x* или при $x = 0$/

Приведём одно из возможных верных рассуждений. Числа указанного вида нечётные, поэтому достаточно рассмотреть квадраты чисел вида $2k – 1$, где $k \in N$. Так как $(2k – 1)^2 = 4k^2 – 4k + 1$, то каждое такое число при делении на 4 даёт остаток 1. Значит, остатка 3 быть не может.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл
Объяснена основная ошибка – 4 балла
Указана неточность, связанная с целыми числами – 1 балл
Приведено верное решение – 4 балла

№6. Функция. «Задача». При каких значениях *a* функция $f(x) = x^2 + ax + 4$ возрастает при $x > 1$ и убывает при $x < 1$?
«Ответ»: ни при каких.

«Решение». $f'(x) = 2x + a$. Функция возрастает, если $f'(x) > 0$, то есть, при $x > -\frac{a}{2}$. Функция убывает, если $f'(x) < 0$, то есть, при $x < -\frac{a}{2}$. По условию: при $x > 1$ $f'(x) > 0$, а при $x < 1$ $f'(x) < 0$. Таким образом, для возрастания на указанном промежутке должно выполняться неравенство $a < –2$, а для убывания на указанном промежутке – неравенство $a > –2$. Так как эти неравенства должны выполняться одновременно, то таких *a* не существует.

В.А. Рыжик. Кто же прав? «Квант», №9/1984

Комментарий. Условие «задачи» корректно, но «ответ» неверный, а «решение» содержит ошибки. Неверно найдены значения *a*, при которых функция возрастает и убывает на указанных промежутках. Действительно, $\begin{cases} x > -\frac{a}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$ при $a \ge -2$, а . $\begin{cases} x < -\frac{a}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$, если $a \le -2$. Кроме того, все неравенства изначально могли быть нестрогими, так как из условия и непрерывности функции $f(x)$ следует, что $x = 1$ и $x = -\frac{a}{2}$ входят как в промежуток возрастания, так и в промежуток убывания. Это соображение позволило бы получить верный ответ даже при ошибке, указанной выше.

Недочётом «решения» является использование производной, которое не требуется для исследования квадратичной функции. Приведём наиболее рациональное решение.

Данная функция – квадратичная, её график – парабола, «ветви» которой направлены вверх, абсцисса её вершины: $x = -\frac{a}{2}$. Требуемые условия выполняются, если $-\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = -2$. **Ответ**: при $a = -2$.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл
Указано, что «ответ» неверный – 1 балл

Указано, что допущена ошибка в найденных значениях а, при которых функция возрастает и убывает – 3 балла
Объяснено, почему неравенства могли быть нестрогими – 1 балл
Указана нерациональность «решения» – 2 балла
Приведены верное решение и верный ответ (либо путём исправления ошибок, либо заново) – 2 балла

№7. Школьники и задачи. «Задача». 10 школьников решали 10 задач. Могло ли случиться так, что все они решили задач поровну, но для каждой задачи количество её решивших было различным?

«Ответ»: нет

«Решение». Пусть за каждую решённую задачу ребёнок получал конфету. Подсчитаем количество конфет: 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55. Слагаемые именно такие, поскольку за все задачи было выдано различное количество конфет. Так как 55 конфет нельзя поровну раздать десяти школьникам, то такого случиться не могло.

И.В. Раскина, А.В. Шаповалов. Комбинаторика – М.: МЦНМО, 2020

Комментарий. Условие задачи корректно, а «ответ» и «решение» неверные. Ошибка состоит в том, что могла быть задача, за которую не выдано конфет так как её никто не решил.

На самом деле, такое могло случиться. Для того, чтобы количество выданных конфет делилось на 10, достаточно в указанной сумме заменить слагаемое 5 на 0. Приведём пример распределения решённых задач в виде таблицы (по горизонтали – номера школьников, по вертикали – номера задач).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	S
1	+	+		+	+	+					5
2	+	+		+	+	+					5
3	+	+	+		+	+					5
4	+	+	+		+	+					5
5	+	+	+		+		+				5
6	+	+	+	+			+				5
7	+	+	+	+			+				5
8	+	+	+	+				+			5
9	+	+	+	+				+			5
10	+		+	+	+				+		5
S	10	9	8	7	6	4	3	2	1	0	

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).
Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл
Указано, что «ответ» неверный – 1 балл
Объяснена ошибка в «решении» – 3 балла
Приведено верное решение – 5 баллов

№8. Наибольшая площадь. На уроке была предложена задача: «Какой из четырёхугольников с заданными сторонами и их фиксированной последовательностью имеет наибольшую площадь?». Ученик предложил её решение.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Диагональ AC делит его на два треугольника. Обозначив через α и γ углы ABC и ADC соответственно, получим: $S_{ABCD} = 0{,}5ab\sin\alpha + 0{,}5cd\sin\gamma \le 0{,}5(ab + cd)$. Равенство достигается, если $\alpha = \gamma = 90°$; то есть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник.

Учитель подразумевал другое решение, поэтому задумался.

1) Согласились бы Вы с приведёнными ответом и решением?

2) Если, согласились, то какие недочёты в решении ученика Вы бы указали? Если не согласились, то что бы Вы возразили, не приводя другого решения?

3) Если Ваше решение отличается от решения ученика, то приведите его.

Предложил А. Блинков

Комментарий. 1) Нет, решение неверное, но ответ верный.

2) Например, если провести диагональ BD, то аналогичные рассуждения покажут, что углы A и C рассматриваемого четырёхугольника также прямые, то есть $ABCD$ – прямоугольник. Тогда $a = c$, $b = d$. Но в условии задачи нет ограничений на длины сторон четырёхугольника, кроме тех, которые определяют его существование. Налицо явное противоречие.

Отметим, что такое решение было бы верным (но нерациональным), если бы в условии задачи вместо четырёхугольника был задан параллелограмм.

3) Приведём верное решение. Докажем, что искомый четырёхугольник – вписанный.

Заметим, что достаточно рассматривать только выпуклые четырёхугольники, так как из любого невыпуклого можно симметрией относительно наружной диагонали получить выпуклый четырёхугольник с теми же сторонами, но большей площадью.

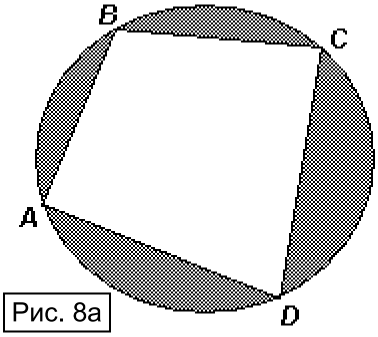


Рис. 8а

Пусть *ABCD* – искомый вписанный четырёхугольник. «Приклеим» к его сторонам сегменты описанного круга (см. рис. 8а). Пусть удалось изменить величины углов четырёхугольника *ABCD* так, чтобы он имел большую площадь и получить четырёхугольник *A*'*B*'*C*'*D*'.

Рассмотрим *A*'*B*'*C*'*D*' вместе с приклеенными к сторонам сегментами круга (см. рис. 8б). Периметр полученной фигуры не изменился, так как он равен сумме длин дуг описанной окружности, а площадь стала больше. Но из всех плоских фигур с данным периметром наибольшую площадь имеет круг. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

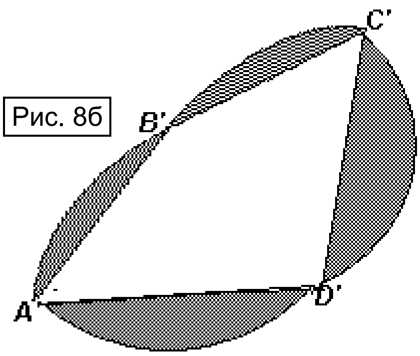


Рис. 8б

Это решение заимствовано из книжки В.Ю. Протасова «Максимумы и минимумы в геометрии». – М., МЦНМО, 2012.

Рассмотренные четырёхугольники называются «шарнирными». Существование и единственность вписанного шарнирного четырёхугольника с данным набором и последовательностью сторон доказывается с помощью идеи непрерывности (подробнее – см. Блинков А.Д., Гуровиц В.М. Непрерывность. – М.: МЦНМО, 2015).

Кроме того, доказанное утверждение можно обобщить для любого шарнирного многоугольника.

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*).

1) Указано, что решение неверное – 1 балл

Указано, что «ответ» верный – 1 балл

2) Верно объяснено противоречие в решении ученика (возможно иначе, чем написано выше) – 3 балла

3) Приведено верное решение – 5 баллов