Всероссийская ассоциация учителей математики
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства города Москвы
Республиканская естественно-математическая школа

III конкурс учителей математики Юга России
Майкоп, Республика Адыгея, 11 декабря 2020 года

Уважаемые коллеги!

1. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно четко указать номер задания (переписывать условия не надо).
2. Первая половина тетради является чистовиком, вторая половина тетради является черновиком.
3. Вам предлагаются два блока заданий:
№1 – №4. «Математический» (задачи для решения).
№5 – №8. «Методический» (задания, моделирующие повседневную работу учителя).
4. Продолжительность конкурса – 4 часа.

Желаем успеха!

I. Решите задачи.

№1. Тир. Коля стрелял в тире. Если он попадал в цель, то ему давали еще 3 дополнительных патрона. А если он попадал в цель два раза подряд, то за второе попадание ему давали 4 патрона. Сначала Коле дали 15 патронов, он сделал 44 выстрела, и патроны у него закончились. Сколько раз Коля попал в цель, если три раза подряд он не попал ни разу?

№2. Социальная дистанция. Тюрьма страны Лилипутия имеет форму квадрата со стороной 4,2 метра, разделённого на одинаковые квадратные камеры (клетки) размером 70 см х 70 см. Какое наибольшее количество заключённых можно в неё посадить, соблюдая социальную дистанцию (расстояние между центрами занятых камер должно быть не меньше, чем 1,5 метра)?

№3. Параметр. При каких значениях параметра b найдется такое значение параметра α, что уравнение $|x - 3\cos\alpha| + |x - 4\sin\alpha| = b$ имеет бесконечно много решений?

№4. Параллельность. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и CE. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка M, а на продолжении AC за точку C – точка N так, что $BM = BC = CN$. Докажите, что прямые DE и MN параллельны.

II. Методический блок

В заданиях №5 – №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так, а если оно корректно, то укажите это. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а также укажите недочёты «решения» (если они есть). Затем приведите верное решение.

№5. Квадрат. «Задача». Докажите, что квадрат натурального числа при делении на 4 не может давать остаток 3.
«Решение». Квадраты натуральных чисел являются ординатами точек параболы $y = x^2$ с целыми абсциссами. Натуральные числа, которые дают остаток 3 при делении на 4 являются ординатами точек прямой $y = 4x + 3$ с целыми абсциссами. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то $x^2 = 4x + 3$. Но это уравнение не имеет целых корней.

№6. Функция. «Задача». При каких значениях a функция $f(x) = x^2 + ax + 4$ возрастает при $x > 1$ и убывает при $x < 1$?
«Ответ»: ни при каких.
«Решение». $f'(x) = 2x + a$. Функция возрастает, если $f'(x) > 0$, то есть, при $x > -\frac{a}{2}$. Функция убывает, если $f'(x) < 0$, то есть, при $x < -\frac{a}{2}$. По условию: при $x > 1$ $f'(x) > 0$, а при $x < 1$ $f'(x) < 0$. Таким образом, для возрастания на указанном промежутке должно выполняться неравенство $a < -2$, а для убывания на указанном промежутке – неравенство $a > -2$. Так как эти неравенства должны выполняться одновременно, то таких a не существует.

№7. Школьники и задачи. «Задача». 10 школьников решали 10 задач. Могло ли случиться так, что все они решили задач поровну, но для каждой задачи количество её решивших было различным?
«Ответ»: нет
«Решение». Пусть за каждую решённую задачу ребёнок получал конфету. Подсчитаем количество конфет: 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55. Слагаемые именно такие, поскольку за все задачи было выдано различное количество конфет. Так как 55 конфет нельзя поровну раздать десяти школьникам, то такого случиться не могло.

№8. Наибольшая площадь. На уроке была предложена задача: «Какой из четырёхугольников с заданными сторонами и их фиксированной последовательностью имеет наибольшую площадь?». Ученик предложил её решение.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Диагональ AC делит его на два треугольника. Обозначив через α и γ углы ABC и ADC соответственно, получим: $S_{ABCD} = 0{,}5ab\sin\alpha + 0{,}5cd\sin\gamma \le 0{,}5(ab + cd)$. Равенство достигается, если $\alpha = \gamma = 90°$; то есть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник.

Учитель подразумевал другое решение, поэтому задумался.

1) Согласились бы Вы с приведёнными ответом и решением?

2) Если, согласились, то какие недочёты в решении ученика Вы бы указали? Если не согласились, то что бы Вы возразили, не приводя другого решения?

3) Если Ваше решение отличается от решения ученика, то приведите его.