ЧЕТВЕРТАЯ РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

31 марта 2019 года

Решения и критерии проверки

Олимпиадный блок

№ 1. Каждое утро упорный мальчик Серёжа записывает дату (месяц и день), а затем считает сумму цифр, которые записал. Например, 4-го февраля он записал 04.02 и вычислил: $0+4+0+2=6$. Какую наибольшую сумму может получить упорный мальчик Серёжа?

Решение: Наибольшую сумму цифр месяца Серёжа может получить в сентябре ($0+9=9$), в остальных месяцах такая сумма не будет превышать 8. Наибольшую сумму цифр дня можно получить 29-го числа любого месяца ($2+9=11$). Тогда наибольшая сумма, которую может получить Серёжа, равна 20.

Ответ: 20.

Критерии:

Приведен верный ответ без обоснования максимальности — 3 балла

№ 2. На соревнованиях по бегу без правил тараканы Рюша и Дюша одновременно стартовали с начала беговой дорожки и бегут с постоянными скоростями. Когда Рюша пробежал 8 м, Дюша пробежал всего 6 м, а когда Рюше оставалось 60 м до конца дорожки, Дюше оставалось 80 м. Какова длина беговой дорожки?

Решение: Заметим, что за *отрезок времени*, когда Рюша пробегает 8 метров, а Дюша — 6 метров, первый таракан обгоняет второго на 2 метра. В тот момент, когда тараканам осталось пробежать 80 и 60 метров соответственно, Рюша обогнал соперника на 20 метров, то есть прошло уже $20:2=10$ таких *отрезков времени*. Значит, к этому моменту Рюша пробежал $8\times 10=80$ метров, а значит длина всей дорожки составляет $80+60=140$ метров.

Ответ: 140 метров.

Критерии:

Без обоснований составлено верное уравнение — 5 баллов

№ 3. У Деда Мороза есть 8 посохов, один из которых волшебный. А у Снеговика есть детектор, позволяющий определить, сколько из помещенных в него посохов волшебные. Как найти волшебный посох за три измерения?

Решение: Разобьем посохи на две группы, по 4 посоха в каждой.

Первое измерение: поместим в детектор любую группу из четырех посохов. Если детектор покажет «1», значит, волшебный посох в этой группе, иначе — во второй. Таким

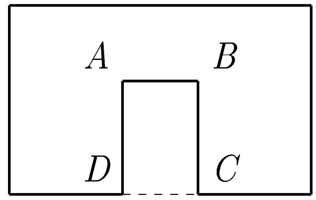
образом, после первого измерения мы знаем, в какой из двух групп находится волшебный посох. Разобьем её на две группы, по два посоха в каждой.
Второе измерение: поместим в детектор любую группу из двух посохов. Если детектор покажет «1», значит, волшебный посох в этой группе, иначе — во второй. Таким образом, после второго измерения мы знаем, в какой из двух групп находится волшебный посох. Разобьем её на две группы, по одному посоху в каждой.
Третье измерение: поместим в детектор любой из оставшихся двух посохов. Если детектор покажет «1», значит, волшебный посох тот, который в детекторе, иначе — оставшийся. Таким образом, волшебный посох определен за три измерения.
Критерии:
Описана верная последовательность измерений без достаточного доказательства — 5 баллов

№ 4. У Буратино есть 2 участка земли, которые он может засадить деревьями и кустарниками. На первом участке всего может поместиться 24 растения, а на втором — 18 растений. С одного дерева на первом участке можно собрать две пятирублевые монеты за день, с одного куста на первом участке — три трехрублевые монеты за день. На втором участке одно дерево дает четыре пятирублевые монеты в день, а один куст — пять десятирублевых монет в день. Как Буратино должен засадить участки, чтобы получить наибольшую прибыль и почему? Какова будет прибыль в этом случае?
Решение: Составим таблицу, показывающую прибыль от каждого вида растения на каждом поле:

	Первое поле	**Второе поле**
Дерево	10 рублей	20 рублей
Кустарник	9 рублей	50 рублей

Из таблицы видно, что на первом поле большую прибыль дает посадка деревьев, на втором же поле выгоднее высаживать кустарники. Значит, Буратино должен высадить на первом поле 24 дерева, а на втором — 18 кустарников. Его прибыль составит $24 \times 10 + 18 \times 50 = 240 + 900 = 1140$ рублей.
Ответ: 1140 рублей.
Критерии:
Приведен только верный ответ — 0 баллов
Приведены подсчеты $24 \times 10 + 18 \times 50 = 240 + 900 = 1140$ без обоснования максимальности — 2 балла
В решении без обоснования утверждается, что первый участок выгоднее засадить деревьями ,а второй — кустарниками. Далее решение верно — 5 баллов

№ 5. Из прямоугольной салфетки вырезали прямоугольник $ABCD$ так, как показано на рисунке. Оказалось, что площадь салфетки уменьшилась на 6, а периметр салфетки увеличился на 6. Найдите длину отрезка AB.
Решение: Заметим, что периметр полученного многоугольника отличается от периметра салфетки добавлением двух отрезков: AD и BC. Значит, $AD + BC = 6$. Поскольку эти отрезки являются противоположными сторонами прямоугольника, то $AD = BC = 3$. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 6, следовательно, $AB = 6 : 3 = 2$.



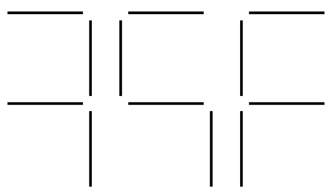
Ответ: 2.

Критерии:

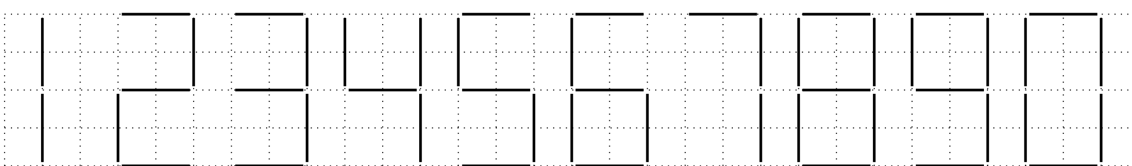
Приведен только верный ответ — 0 баллов

Приведены ответ с проверкой того, что он возможен — 2 балла

№ 6. На столе из спичек выложено число 358 (см. рисунок). Какое наибольшее число можно получить из данного, переложив а) одну спичку? б) две спички?



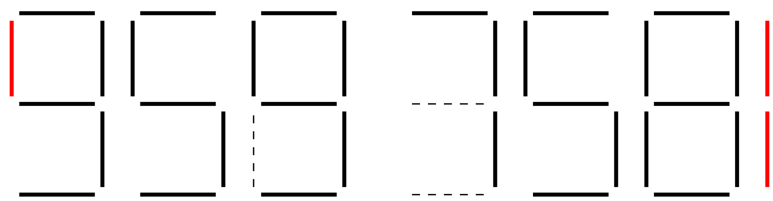
Образцы цифр из спичек приведены на рисунке



Решение:

а) Заметим, что единственной цифрой данного числа, у которой можно «забрать» спичку, получив при этом другую цифру, является цифра 8. Максимальная цифра, которую при этом можно получить — 9. Переставить эту спичку можно несколькими способами (например, получить из цифры 5 цифру 6 или 9). Но наибольшее число получится, если приставить эту спичку в цифре 3, получив при этом 9 в цифре сотен. Получим число 959.

б) Очевидно, что получить пятизначное число, переложив две спички, нельзя. Попробуем получить наибольшее возможное четырехзначное число. Для этого нужно получить наибольшую возможную цифру в разряде тысяч. Число в этом разряде можно получить либо выставив две спички в начало в виде единицы, либо оставив на этом месте тройку, либо «превратить» тройку в большую цифру. Добавление спичек к уже данным цифрам лишит нас возможности получить четырехзначное число, поэтому этот вариант нам не подходит. Цифра три состоит из пяти спичек. Если убрать одну из них то полученный рисунок не будет цифрой. Если же убрать две, то из оставшихся трех спичек можно получить только семерку. Итак, наибольшая возможная цифра в разряде тысяч — 7. Теперь из двух убранных спичек мы можем сложить только единицу. Эту единицу можно поставить в разряд сотен, десятков или единиц, получив соответственно 7158, 7518, 7581. Последнее число наибольшее.



Ответ: 959, 7581.
Критерии: *в данной задаче баллы за различные продвижения не суммируются.*
Приведен верный ответ к одному из пунктов — 2 балла
Приведены верные ответы к двум пунктам — 5 баллов
Приведен один ответ и доказано, что большее число получить ни при каких перекладываниях невозможно — 3 балла
К одному из пунктов приведен ответ и доказано, что большее число получить ни при каких перекладываниях невозможно, к другому пункту дан только верный ответ — 6 баллов

Методический блок

В предложенных ниже «задачах» могут содержаться математические ошибки в «решениях». Если приведено несколько «решений», то необходимо оценить каждое из них. Является ли оно правильным, частично правильным или абсолютно неверным. Какие именно ошибки были допущены? Если во всех решениях содержались ошибки, то приведите верное решение.

№ 7. *«Задача»* Азамат перечисляет трехзначные числа, начинающиеся на 4. У скольких чисел, названных Азаматом, все цифры различны и расположены в порядке убывания?
«Решение» После четверки могут идти цифры 1, 2, 3. Выпишем все подходящие числа: 432, 423, 431, 413, 421, 412. Всего шесть чисел.
«Ответ» 6.
Решение:
1) Предложенное решение является неверным, поскольку содержит несколько ошибок. Во-первых, не учтено, что в записи числа может использоваться цифра 0, во-вторых, в нескольких числах цифры идут не в порядке убывания (423, 413, 412).
2) Правильное решение: с учетом вышеизлоненного, необходимо было выписать следующие числа: 430, 431, 432, 420, 421, 410.
Критерии: *Решение данной задачи состоит из нескольких пунктов, баллы за каждый пункт суммируются.*
Указано, что в «решении» не использован ноль — 2 балла

Указано, что в «решении» неверно приведены числа с убывающим порядком цифр — 2 балла

Приведено верное решение — 3 балла.

№ 8. *«Задача»* Найдите наименьшее натуральное число, кратное 10, сумма цифр которого равна 10.

«Решение» Методом подбора возьмем число 190. Оно делится на 10 по признаку делимости на 10 (его последняя цифра равна нулю). Кроме того, сумма цифр числа 190 равна 1+9+0=10. Что и требовалось.

«Ответ» 190.

Решение:

1)Приведенное «решение» неверно: оно является лишь проверкой того, что число 190 удовлетворяет двум из трех условий задачи (делится на 10 и имеет сумму цифр 10). Для решения этого недостаточно. В решении данной задачи необходимо доказать, что приведенное число действительно является наименьшим из всех возможных.

2) Приведем одно из возможных правильных решений:

Поскольку искомое число делится на 10, то по признаку делимости на 10 оно должно оканчиваться на 0. Наименьшее такое натуральное число 10, но оно не удовлетворяет второму условию задачи (его сумма цифр равна 1). Рассматривая последовательно все числа от 20 до 180, убеждаемся, что ни у одного из них сумма цифр не равна 10. Следовательно, 190 — искомое число.

Критерии: *Решение данной задачи состоит из нескольких пунктов, баллы за каждый пункт суммируются.*

Указано, что в «решении» нет доказательства минимальности числа — 3 балла

Приведено верное решение — 4 балла.