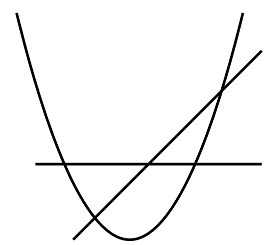
ЗАДАНИЯ РЕГИОНАЛЬНОГО ЭТАПА
Открытого творческого конкурса учителей математики общеобразовательных организаций

12 апреля 2019 года

> Если бы в математике не было красоты, то, наверное, не было бы и самой математики. Иначе какая тогда сила притягивала бы к этой нелегкой науке крупнейших гениев человечества?
>
> Н.А. Чайковский

№ 1. На координатной плоскости нарисовали прямые $y = 2$, $y = 2x$ и параболу $y = x^2 + bx + c$. Потом координатные оси стерли. Получился рисунок, изображенный справа. Докажите, что $3b^2 - 12c - 4b + 20 > 0$.



№ 2. Дана треугольная пирамида, в которой боковые ребра равны a. Два плоских угла при вершине пирамиды равны α, а третий равен β. Найдите объем пирамиды.

№ 3. Пусть A — число способов, которыми можно разбить натуральное число n на k натуральных слагаемых, а B — число способов, которыми можно разбить n на произвольное число натуральных слагаемых, наибольшее из которых равно k. Докажите, что $A = B$.

№ 4. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Задача.» $m^2 + n^2 \vdots 3$. Докажите, что $m \vdots 3 \wedge n \vdots 3$.

«Решение.» Предположим противное: пусть $m \not\vdots 3 \wedge n \not\vdots 3$. Тогда $m = 3k + 1, n = 3l + 1$. $m^2 + n^2 = (3k+1)^2 + (3l+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 + 9l^2 + 6l + 1 = 3(3k^2 + 2k + 3l^2 + 2l) + 2$. Полученное число имеет остаток 2 от деления на три. Получаем противоречие с условием. Значит, $m \vdots 3 \wedge n \vdots 3$.

№ 5. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Задача.» Решите неравенство $\log_x\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \le \log_{\sqrt{2x+3}}\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$.

«Решение.»

$$\frac{1}{\log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)} x} \le \frac{1}{\log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)} \sqrt{2x+3}};$$

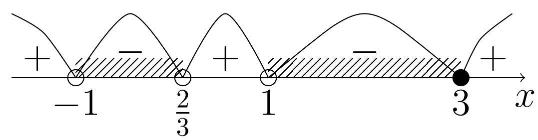
$$\frac{\log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)} \sqrt{2x+3} - \log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)} x}{\log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)} x \cdot \log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)} \sqrt{2x+3}} \le 0;$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{3}-1\right)\left(\sqrt{2x+3}-x\right)}{\left(x+\frac{1}{3}-1\right)^2 (x-1)(\sqrt{2x+3}-1)} \le 0;$$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)(2x+3-x^2)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 (x-1)(2x+2)} \le 0;$$

$$\frac{x^2-2x-3}{\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)(x+1)} \le 0;$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)(x+1)} \le 0;$$



«Ответ.» $\left(-1;\dfrac{2}{3}\right) \cup (1;3]$.