РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ РАБОТ УЧАСТНИКОВ I МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА

Открытого творческого конкурса учителей математики общеобразовательных организаций

2019 год

23 марта 2019 года

Максимальный балл по каждой задаче — 7

№ 1. Докажите, что число $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ является иррациональным.
Решение. Предположим противное: пусть число $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ является рациональным числом r. Тогда: $\sqrt{5}-\sqrt{3}=r$; $\sqrt{5}=\sqrt{3}+r$.
Возведем обе части равенства в квадрат (это преобразование является равносильным, поскольку обе части равенства неотрицательны): $\sqrt{5}^2=(\sqrt{3}+r)^2$; $5=3+2\sqrt{3}r+r^2$.
Выразим $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3}=\frac{2-r^2}{2r}.$$

Так как разность и частное двух рациональных чисел является рациональным числом,, мы приходим к противоречию: $\sqrt{3}$ получился равным рациональному числу.
Следовательно, наше предположение неверно, число $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ является иррациональным.
Критерии:
Доказывать, что числа $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$ являются иррациональными, не нужно.

Критерий	Балл
Сказано, что разность двух иррациональных чисел не может быть рациональным числом	0 баллов
Произведено возведение в квадрат без указания равносильности	снимается 1 балл

№ 2. Решите уравнение $x^2+2x\cos 2\pi x+1=0$.
Решение 1. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x. Дискриминант этого уравнения равен $4\cos^2 2\pi x-4$ и неотрицателен только при $\cos 2\pi x \in (-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.
Следовательно, возможны только два случая: $\cos 2\pi x=-1$ и $\cos 2\pi x=1$.
Тогда исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2\pi x=1,\\ x^2+2x+1=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2\pi x=-1,\\ x^2-2x+1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-1$$

Откуда получаем $x = -1$.
Ответ. $x = -1$.
Решение 2. Выделим в левой части уравнения полный квадрат. Получим:

$$(x + \cos 2\pi x)^2 + 1 - \cos^2 2\pi x = 0;$$

Заметим, что оба слагаемых в левой части полученного уравнения неотрицательны. Следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + \cos 2\pi x = 0; \\ 1 - \cos^2 2\pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x = -\cos 2\pi x \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 2\pi x = -1, \\ x = -\cos 2\pi x \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -1$$

Ответ. $x = -1$.
Критерии:

Критерий	Балл
Получено два корня ($x = \pm 1$), проверка не проведена или проведена неверно	3 балла
Решение доведено до уравнения $\cos 2\pi x = \pm 1$, дальнейших продвижений нет	1 балл

№ 3. Решите неравенство $\dfrac{\log_9 x - \log_{18} x}{\log_{18}(2-x) - \log_{36}(2-x)} \leq \log_{36} 9$.
Решение. Областью допустимых значений переменной данного неравенства является объединение двух интервалов: $x \in (0;1) \cup (1;2)$. Поскольку $x = 1$ не входит в ОДЗ неравенства, преобразуем его левую часть к следующему виду:

$$\frac{\dfrac{1}{\log_x 9} - \dfrac{1}{\log_x 18}}{\dfrac{1}{\log_{2-x} 18} - \dfrac{1}{\log_{2-x} 36}} \leq \log_{36} 9;$$

Тогда:

$$\frac{\log_x 2 \cdot \log_{2-x} 18 \cdot \log_{2-x} 36}{\log_{2-x} 2 \cdot \log_x 9 \cdot \log_x 18} \leq \log_{36} 9;$$

$$\log_x (2-x) \cdot \log_{2-x} x \cdot \frac{\log_9 x}{\log_{36}(2-x)} \leq \log_{36} 9;$$

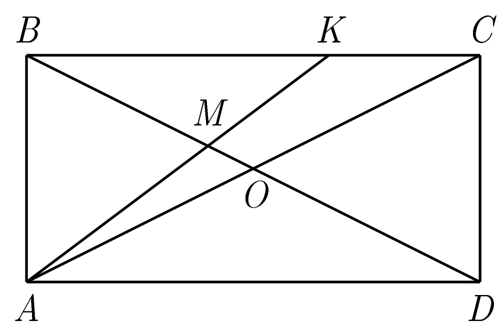
$$\frac{\log_{36} x}{\log_{36} 9 \cdot \log_{36}(2-x)} \leq \log_{36} 9;$$

$$\log_{2-x} x \leq \log_{36}^2 9.$$

При $x \in (0;1)$ основание логарифма в левой части неравенства больше единицы, а подлогарифмическое выражение — меньше единицы, то есть левая часть неравенства отрицательна.
При $x \in (1;2)$ основание логарифма в левой части неравенства меньше единицы, а подлогарифмическое выражение — больше единицы, то есть левая часть неравенства отрицательна.
Таким образом, левая часть неравенства отрицательна при всех x из ОДЗ, а правая часть неравенства — неотрицательна. Следовательно, неравенство выполнено при всех x из ОДЗ.
Ответ. $x \in (0;1) \cup (1;2)$.
Критерии:

Критерий	Балл
ОДЗ неверно найдена или не найдена совсем	0 баллов
Из-за ошибки в рассужденях потеряна часть ответа	3 балла
Неравенство преобразовано к виду $\log_{2-x} x \le \log_{36}^2 9$, дальнейших продвижений нет	2 балла

№ 4. В прямоугольнике $ABCD$ на стороне BC отмечена точка K так, что $BK = 2CK$. Найдите отношение, в котором BD делит площадь треугольника AKC.
Решение.
1. Обозначим точку пересечения диагоналей прямоугольника O, а точку пересечения AK и BD — M.
2. Очевидно, $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Найдем отношение $\dfrac{AM}{AK}$.
3. Рассмотрим подобные треугольники $\triangle MBK$ и $\triangle MDA$:
$\dfrac{AM}{MK} = \dfrac{AD}{BK} = \dfrac{3}{2}$. Тогда $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{3}{5}$.
4. Найдем отношение площадей треугольников $\triangle AMO$ и $\triangle AKC$:
$$\frac{S_{\triangle AMO}}{S_{\triangle AKC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AM\cdot AO\cdot\sin A}{\frac{1}{2}\cdot AK\cdot AC\cdot\sin A} = \frac{AM\cdot AO}{AK\cdot AC} = \frac{3\cdot 1}{5\cdot 2} = \frac{3}{10}.$$



5. Тогда искомое отношение равно:
$$\frac{S_{\triangle AMO}}{S_{MKCO}} = \frac{3}{7}.$$
Ответ. $\dfrac{3}{7}$.
Критерии:

Критерий	Балл
Допущена арифметическая ошибка, повлиявшая на ответ	5 баллов
Вместо отношения $\dfrac{S_{\triangle AMO}}{S_{MKCO}}$ найдено $\dfrac{S_{\triangle AMO}}{S_{\triangle AKC}}$	снимается 1 балл

№ 5. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Условие.» Изобразите на координатной плоскости множество вершин парабол $y = (a+1)x^2 - 2ax + a$, где $a \in \mathbb{R}$.

«Решение.»

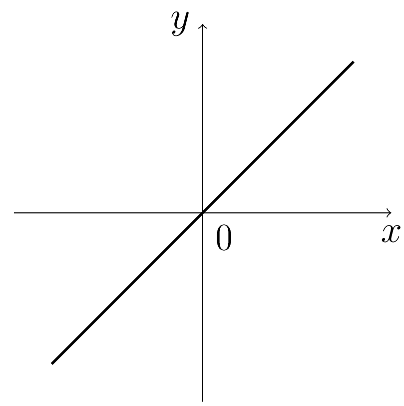
Найдем координаты вершин парабол:

$$x_B = \frac{a}{a+1};$$

$$y_B = (a+1)\frac{a^2}{(a+1)^2} - 2a\cdot\frac{a}{a+1} + a = \frac{a^2}{a+1} - \frac{2a^2}{a+1} + \frac{a^2+a}{a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{a}{a+1}, \\ y_B = \dfrac{a}{a+1} \end{cases}$$



Следовательно, вершины расположены на биссектрисе первой и третьей координатных четвертей.

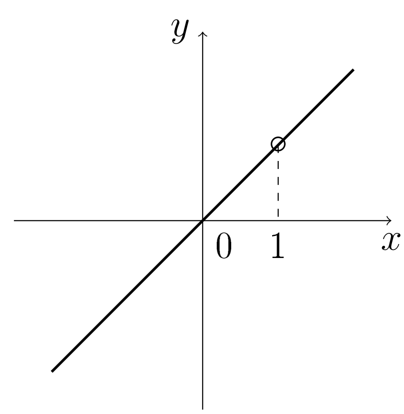
Решение. Заметим, что при $a = -1$ данная функция задает на плоскости не параболу, а прямую.

Следовательно, условие задачи некорректно. Вместо данного в условии $a \in \mathbb{R}$ необходимо указать, что $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

В предложенном «решении» не учтено, что абсцисса вершины параболы, заданная формулой $x_B = \dfrac{a}{a+1}$ (как и ордината, заданная такой же формулой), не достигает всех действительных значений.

Действительно, пусть $\dfrac{a}{a+1} = k, k \in \mathbb{R}$. Тогда $(1-k)a = k$. Это уравнение не имеет решений при $k = 1$, то есть дробь $\dfrac{a}{a+1}$ ни при каких значениях a не может быть равна 1.

Следовательно, на графике, представленном в приведенном «решении», должна быть проколота точка $(1;1)$.



Вывод. Условие задачи некорректно. В приведенном решении допушена ошибка.

Критерии:

Критерий	Балл
Найдена ошибка в условии задачи	2 балла
Найдена ошибка в решении задачи	2 балла
Исправлена ошибка в решении задачи	3 балла