РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ РАБОТ УЧАСТНИКОВ I МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА
Открытого творческого конкурса учителей математики общеобразовательных организаций
2020 год

29 февраля 2020 года

Максимальный балл по каждой задаче — 7.

№ 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(2a-1)x^2-ax+2a-3=0$ имеет не более одного корня.

Решение. Заметим, что при $a=\dfrac{1}{2}$ данное уравнение принимает вид $-\dfrac{1}{2}x-2=0$, становясь линейным и имеет единственный корень $x=-4$.
Рассмотрим теперь случай, когда старший коэффициент уравнения не равен нулю, то есть уравнение — квадратное. В этом случае оно имеет не более одного корня тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен:
$D\leq 0 \Leftrightarrow a^2-4(2a-1)(2a-3)\leq 0 \Leftrightarrow -15a^2+32a-12\leq 0 \Leftrightarrow 15a^2-32a+12\geq 0 \Leftrightarrow$
$a\in\left(-\infty;\dfrac{16-2\sqrt{19}}{15}\right]\cup\left[\dfrac{16+2\sqrt{19}}{15};-\infty\right)$.

Так как корень $a=\dfrac{1}{2}$ не попал ни в один из этих промежутков, получаем ответ $a\in\left(-\infty;\dfrac{16-2\sqrt{19}}{15}\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left[\dfrac{16+2\sqrt{19}}{15};-\infty\right)$.

Критерии:

Критерий	Балл
Нет проверки, что $a=\dfrac{1}{2}$ не входит в полученные интервалы	6 баллов
Потерян случай $a=\dfrac{1}{2}$	3 балла
Разобран только случай $a=\dfrac{1}{2}$	1 балл
Арифметическая ошибка	— 1 балл

№ 2. Решите уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}}=(3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(1+5x-x^2)}$.

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(1+5x-x^2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-5=1, \\ 1+5x-x^2>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-5>0, \\ 3x-5\neq 1, \\ \log_{\frac{1}{25}}(1+5x-x^2) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ \begin{cases} 3x-5>0, \\ 3x-5\neq 1, \\ 1+5x-x^2=5. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2, \\ \begin{cases} 3x-5>0, \\ 3x-5\neq 1, \\ x=1 \vee x=4. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ: $2, 4$.

Критерии:

Критерий	Балл
Потерян случай $x = 2$	4 балла
Разобран только случай $x = 2$	2 балла
Частично или полностью не учтена ОДЗ	не более 3 баллов
Арифметическая ошибка	— 1 балл
В ОДЗ вынесено только неравенство $3x - 5 > 0$	— 1 балл

№ 3. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $2/3$ расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч.
Найдите скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

Решение. Путь расстояние от A до B равно S, v — скорость велосипедиста, u — скорость мотоциклиста.
Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{2}{3}S}{u} + \dfrac{\frac{1}{3}S}{v} = \dfrac{S}{40}, \\ \dfrac{S}{u+v} = \dfrac{S}{100}, \\ u > v. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3u} + \dfrac{1}{3v} = \dfrac{1}{40}, \\ u+v=100, \\ u>v. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3u} + \dfrac{1}{3(100-u)} = \dfrac{1}{40}, \\ v = 100-u, \\ u > 50. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40(2(100-u)+u) = 3u(100-u), \\ v=100-u, \\ u>50. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - 340u + 8000 = 0, \\ v = 100-u, \\ u>50. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{100}{3} \vee u = 80, \\ v=100-u, \\ u>50. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = 80.$$

Ответ. $u = 80$.
Критерии:

Критерий	Балл
Арифметическая ошибка в решении задачи	— 1 балл
Не учтено условие, что $u > v$, получено два ответа	4 балла

№ 4. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны одному и двум метрам. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.
Решение. Пусть K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD данного выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Поскольку KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC , то $KL \parallel MN$ и $KL = MN$, значит, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, а т.к. его диагонали KM и LN равны, то $KLMN$ — прямоугольник. Стороны прямоугольника $KLMN$ параллельны диагоналям AC и BD четырёхугольника $ABCD$, поэтому диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.
Ответ. 1.
Критерии:

Критерий	Балл
Арифметическая ошибка	— 1 балл
Доказано, что $KLMN$ — прямоугольник	2 балла

№ 5. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Условие» Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\operatorname{ctg} x - 1$.

«Решение» Левую часть уравнения преобразуем по формуле тангенса суммы и перейдём к новой переменной $y = \operatorname{tg} x$. Получим для этой переменной уравнение:

$$\frac{y+1}{1-y} = \frac{3}{y} - 1.$$

Из этого уравнения найдём $y = \dfrac{3}{5}$. Значит, $x = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5} + \pi k$.

«Ответ» $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5} + \pi k$.

Решение. При таком решении происходит сужение области определения функций, входящих в уравнение, и теряется серия $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot n$.
Для исправления ошибки достаточно дополнить решение рассмотрением случая $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot n$ и убедиться, что эта серия также входит в ответ.

Критерии:

Критерий	Балл
Приведено только верное решение, без указания на ошибку	3 балла
Указано в качестве ошибки, что k должно быть целым	1 балл