РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ РАБОТ УЧАСТНИКОВ I МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей математики общеобразовательных организаций

12 марта 2021 года

Максимальный балл по каждой задаче — 7.

№ 1. Существует ли прямая, относительно которой симметричен график функции $y = 2^x$?

Решение. Если график имеет ось симметрии, то его асимптоты либо имеют симметричную асимптоту относительно этой оси, либо совпадают с ней. График функции $y = 2^x$ не симметричен относительно свое асимптоты $y = 0$ и не имеет второй асимптоты, которая могла бы при симметрии перейти в $y = 0$.

Ответ. Нет, не имеет.

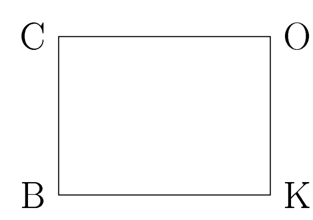
Критерии:

Критерий	*Балл*
Не учтен случай, когда асимптота является осью симметрии	5 баллов

№ 2. Деревни Воробьёво, Кукушкино, Орлово, Соловьёво являются вершинами прямоугольника в указанном порядке. Стороны прямоугольника являются дорогами между деревнями. Всадник Азамат и велосипедист Сергей с постоянными скоростями стартовали одновременно из деревни Воробьёво в разных направлениях: Азамат за один час проскакал по маршруту *Воробьёво → Кукушкино → Орлово → Соловьёво*; Сергей за один час проехал по маршруту *Воробьёво → Соловьёво → Орлово → Кукушкино*. Через какое время Азамат и Сергей встретятся?

Решение.

За один час вместе Азамат и Сергей проехали бы трижды сторону ВК и трижды сторону КО, так как Азамат проезжает за час две стороны, равные ВК, и одну, равную КО, а Сергей — за час две стороны, равные КО, и одну, равную ВК. Значит, за треть часа, то есть за 20 минут вместе Азамат и Сергей проедут одну сторону, равную ВК, и одну – равную КО. А весь периметр прямоугольника они проедут за вдвое больший промежуток времени.



Ответ. 40 минут.

Критерии:

Критерий	*Балл*
Верный ответ без обоснований	1 балл
Верный ответ получен на примере	3 балла

№ 3. Решите уравнение

$$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\log_2(5-x^2)=0.$$

Решение. Приведенное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\\ \log_2(5-x^2)=0,\end{array}\right.\\ 5-x^2>0,\\ \cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-2\sqrt{3}\sin\pi x+\operatorname{ctg}\pi x=0,\\ 5-x^2=1,\end{array}\right.\\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5},\\ \sin\pi x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\cos\pi x-2\sqrt{3}\sin^2\pi x}{\sin\pi x}=0,\\ x=\pm 2,\end{array}\right.\\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5},\\ \pi x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos\pi x-2\sqrt{3}(1-\cos^2\pi x)=0,\\ x=\pm 2,\end{array}\right.\\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5},\\ x\neq n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\sqrt{3}\cos^2\pi x+\cos\pi x-2\sqrt{3}=0,\\ x=\pm 2,\end{array}\right.\\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5},\\ x\neq n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos\pi x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\\ \cos\pi x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ x=\pm 2,\end{array}\right.\\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5},\\ x\neq n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\pi x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z},\\ x=\pm 2,\end{array}\right.\\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5},\\ x\neq n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{1}{6}+2k, k\in\mathbb{Z},\\ x=\pm 2,\end{array}\right.\\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5},\\ x\neq n, n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x\in\left\{\pm\frac{1}{6};\pm\frac{11}{6};\pm\frac{13}{6}\right\}$$

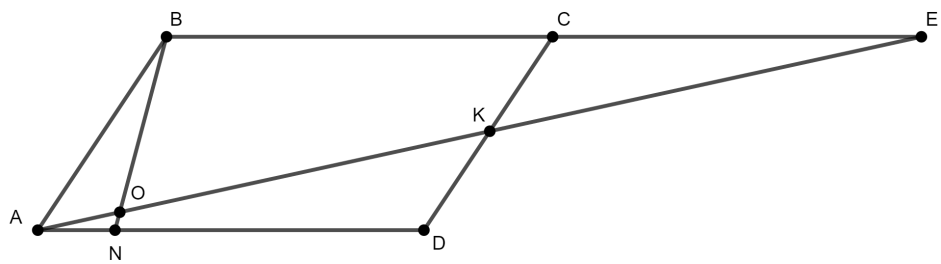
Ответ. $\pm\frac{1}{6};\pm\frac{11}{6};\pm\frac{13}{6}$.

Критерии:

Критерий	*Балл*
Верно найдены нули левой части уравнения	3 балла
Отсутствие одного из ограничений $5-x^2>0$, $\sin\pi x\neq 0$	– 2 балла за каждое
Записано, но не применено ограничение $5-x^2>0$	– 1 балл
Записано, но не применено ограничение $\sin\pi x\neq 0$	– 1 балл

№ 4. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки N и K соответственно так, что $AN : ND = 1 : 4$, $DK : KC = 2 : 3$. Отрезки AK и BN пересекаются в точке O. Найдите площадь четырхугольника $OKDN$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 540.

Решение.



Первый способ. Продлим отрезок AK за точку K до пересечения с прямой BC в точке E. Введем обозначения: $AN = x, ND = 4x, DK = 2y, KC = 3y$.

Из подобия треугольников $\triangle AKD$ и $\triangle CKE$ следует, что $CE = \frac{3}{2}\cdot AD = \frac{15}{2}\cdot x$. $S_{AKD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{5}\cdot 540 = 108$.

Из подобия треугольников $\triangle AON$ и $\triangle BOE$ следует, что $\frac{ON}{BO} = \frac{AN}{BE} = \frac{x}{\frac{25}{2x}} = \frac{2}{25}$, следовательно, $\frac{ON}{BN} = \frac{2}{27}$.

$$S_{AON} = \frac{2}{27}\cdot S_{ABN} = \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{5}\cdot S_{ABD} = \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{27\cdot 5}\cdot S_{ABCD} = 4.$$

Площадь искомого четырехугольника равна $S_{OKDN} = S_{AKD} - S_{AON} = 108 - 4 = 104$.

Ответ. 104.

Второй способ. Продлим отрезок AK за точку K до пересечения с прямой BC в точке E. Введем обозначения: $AN = x, ND = 4x$.

Из подобия треугольников $\triangle AKD$ и $\triangle CKE$ следует, что $\frac{AK}{KE} = \frac{2}{3}$; $AE = 5z$.

$S_{AKD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{5}\cdot 540 = 108.$

$\dfrac{AO}{OE} = \dfrac{x}{\frac{25}{2}x} = \dfrac{2}{25}$.

Тогда $AE = 27c, 5z = 27c, c = \dfrac{5}{27} \cdot z, AO = 2c = \dfrac{10}{27} \cdot z, AK = 2z$.

$\dfrac{S_{AON}}{S_{AKD}} = \dfrac{AO}{AK} \cdot \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{\frac{10}{27}z}{2z} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{27}$.

$S_{AON} = \dfrac{1}{27} \cdot 108 = 4, S_{OKDN} = 108 - 4 = 104$.

Ответ. 104.

Критерии:

Критерий	*Балл*
Арифметическая ошибка	– 2 балла
Верно найдена S_{AKD} или S_{ABN}, дальнейших содержательных продвижений нет	3 балла

№ 5. *В предложенном тексте могут содержаться математические ошибки (как в условии «задачи», так и в «ответе» и «решении»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.*

«Условие» При каком значении параметра p уравнение $p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ имеет единственное решение?

«Решение» Выполним преобразование:

$$p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5 \Leftrightarrow p \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow p \cdot y^2 - 5y + 1 = 0, y = 2^x.$$

Отметим, что каждому значению x соответствует одно значение y. Полученное квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант $D = 25 - 4p = 0$, то есть $p = \dfrac{25}{4}$. Кроме того, необходимо учесть, что при $p = 0$ квадратное уравнение превращается в линейное, которое также имеет единственное решение.

«Ответ» $\left\{0; \dfrac{25}{4}\right\}$.

Решение. В приведенном решении неверно указано условие существования единственного решения: полученное после преобразований квадратное уравнение должно иметь *единственный положительный корень*.

Рассмотрим два случая.

1. $p = 0$. Соответствующее уравнение $-5y + 1 = 0$ имеет один положительный корень.

2. $p \neq 0$. Тогда квадратное уравнение имеет корни $y_{1;2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4p}}{2p}$.

При $p = \dfrac{25}{4}$ дискриминант $D = 25 - 4p = 0$, и уравнение имеет один положительный корень.

В случае, когда квадратное уравнение имеет два различных корня, один из которых положительный, а другой – отрицательный, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $p \cdot f(0) < 0 \Leftrightarrow p \cdot 1 < 0 \Leftrightarrow p < 0$.
Случай, когда один корень положительный, а другой равен нулю, невозможен.
Итак, получаем $p \in (-\infty; 0] \cup \left\{\dfrac{25}{4}\right\}$.

Ответ. $p \in (-\infty; 0] \cup \left\{\dfrac{25}{4}\right\}$.

Критерии:

Критерий	*Балл*
Верно указана ошибка	3 балла
Приведено верное решение	4 балла
В верном решении не рассмотрен случай, когда один из корней равен нулю	–1 балла