ЗАДАНИЯ ОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных учреждений Республики Адыгея

2012 год

1. Решите неравенство: $\sqrt{12x^2+42x+1}+\left|2x^2+7x\right|\geq 9$
2. Длина апофемы боковой грани правильной треугольной пирамиды k. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех ее вершин. Найдите площадь получившегося сечения, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью ее основания угол величиной β.
3. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Условие задачи:

Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} axy+x-y+\dfrac{3}{2}=0, \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Очевидно ни при каких y пара $(-2;y)$ не является решением данной системы. Тогда из второго уравнения системы получаем

$y=\dfrac{-x-1}{x+2}$. С учетом последнего, первое уравнение системы

можно преобразовать к следующему: $2x^2(1-a)+x(9-2a)+8=0$.

Это уравнение имеет единственное решение, если $1-a=0$ или

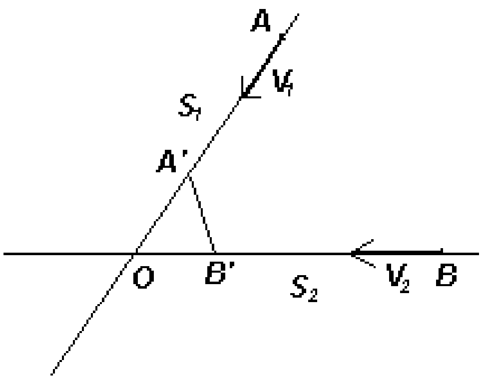
$D=(9-2a)^2-64(1-a)=0,$ т.е. при $a=1$ или $a=\dfrac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $a=1,$. или $a=\dfrac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$.

4. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Условие задачи:

Два всадника движутся равномерно и прямолинейно, так что их траектории движения пересекаются. В полдень расстояние между ними было 6 км, в 13.00 – 5 км, в 14.00 – 2 км. Найти момент времени, в который расстояние между всадниками принимает наибольшее значение?



Решение.

Пусть *a* и *b* – прямые, по которым движутся всадники. В 12.00 они находились в точках *A* и *B* (см. рис.).

Пусть также $|OA| = S_1$, $|OB| = S_2$, а скорости всадников равны соответственно V_1 и V_2. Пусть через *t* часов всадники будут находится в точках *A'* и *B'*, пройдя V_1t км и V_2t км соответственно. Применим для треугольника *A'OB'* теорему косинусов, получим:

$$|A'B'|^2=\left(S_1\pm V_1t\right)^2+\left(S_2\pm V_2t\right)^2-2\left(S_1\pm V_1t\right)\left(S_2\pm V_2t\right)\cos\angle AOB$$

(знаки в скобках учитывают, что всадники могут оказаться и на лучах, дополнительных к *OA* и *OB*).

Уравнение показывает, что зависимость квадрата расстояния между всадниками от времени является квадратичной функцией.

Пусть ее уравнение $f(t) = at^2 + bt + c$.

В качестве начала отсчета времени возьмем полдень.

Тогда, из условия задачи следует, что

$f(0) = c = 36$; $f(1) = a + b + c = 25$; $f(2) = 4a + 2b + c = 4$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} c = 36 \\ a + b + c = 25 \\ 4a + 2b + c = 4 \end{cases}$$, получим, что $$\begin{cases} a = -5 \\ b = -6 \\ c = 36 \end{cases}.$$

Таким образом, функция имеет вид: $f(t) = -5t^2 - 6t + 36$. Свое наибольшее значение она принимает в точке $t_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{5}$.

Так как $f\left(-\dfrac{3}{5}\right) > 0$, то в этот же момент времени будет наибольшим и расстояние между всадниками.

Ответ: в 11 часов 24 минуты расстояние между всадниками было наибольшим.

5. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(x + \sqrt{2}z\right)^2 + \left(y + \sqrt{2}t\right)^2 = 25 + 2a\sqrt{25 - a^2} \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ z^2 + t^2 = \left(25 - a^2\right)/2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.