

ЗАДАНИЯ ЗАОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных учреждений Республики Адыгея 2012 год

1. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2}}(6-x-x^2) + \log_2(x^2-2x+1) > 2\log_4(x^2-4x+3)^2$.
2. Три литровых пачки грейпфрутового сока содержат соответственно 2%, 4% и 8% сахара. Любитель 4,5%-го содержания сахара в соке, смешивая их, выпивает в день $\frac{2}{7}$ литра сока. На какое наибольшее количество дней ему хватит этих трех пачек сока?
3. В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 6, а две другие равны 10. Высота пирамиды равна 7. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найти объем пирамиды.
4. Решение данной задачи является неверным. Укажите ошибки (с обоснованием). Как необходимо изменить условие задачи, чтобы решение стало верным.

Условие задачи:

Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 4 раза?

Решение:

Площадь увеличивается пропорционально в $4^2 = 16$ раз.

Ответ: 16.

5. *Текст, ответ и решение задачи взяты из математической литературы. Тем не менее, они могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Условие задачи:

Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение четырех месяцев работа не производилась, а все остальное время (32 месяца) работала только одна из бригад. Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год 4 : 1 : 2 : 5 и 10 млн т;

во второй год 2 : 3 : 2 : 1 и 7 млн т;

в третий год 5 : 2 : 1 : 4 и 14 млн т.

Сколько миллионов тонн сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая все вместе?

Решение:

Пусть x, y, z, t — производительности (в месяц) соответственно 1й, 2й, 3й и 4й бригад.

Согласно условию в первый год работы имеем: $4k + k + 2k + 5k = 12 \Rightarrow k = 1$, т. е. в первый год 1^я бригада работала 4 месяца, 2^я — 1 месяц, 3^я — 2 месяца и 4^я — 5 месяцев.

Тогда: $4x + y + 2z + 5t = 10$.

Аналогично, так как во второй год бригады работали 8 месяцев, то получим уравнение: $2x + 3y + 2z + t = 7$.

Для третьего года имеем: $5x + 2y + z + 4t = 14$.

Необходимо найти $4x + 4y + 4z + 4t$.

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

Представим выражение $4x + 4y + 4z + 4t$ как линейную комбинацию данных выражений, т.е.

$$4x + 4y + 4z + 4t = \alpha(4x + y + 2z + 5t) + \beta(2x + 3y + 2z + t) + \gamma(5x + 2y + z + 4t).$$

Приравнявая коэффициенты при x, y, z получаем систему:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta + 5\gamma = 4, \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma = 4, \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 4, \\ 5\alpha + \beta + 4\gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{9}, \beta = \frac{4}{3}, \gamma = -\frac{4}{9}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} 4x + 4y + 4z + 4t &= \frac{8}{9}(4x + y + 2z + 5t) + \frac{4}{3}(2x + 3y + 2z + t) - \frac{4}{9}(5x + 2y + z + 4t) = \\ &= \frac{8}{9} \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot 7 - \frac{4}{9} \cdot 14 = 12. \end{aligned}$$

Ответ: 12 млн.т.

6. Двоечник Петя считает, что площадь выпуклого четырехугольника равна произведению полусумм противоположных сторон. Учитель сказал, что не поставит ему двойку, если он найдет все четырехугольники, к которым применима эта формула. Помогите Пете получить положительную оценку.