ЗАДАНИЯ ЗАОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных учреждений Республики Адыгея 2013 год

1. Финалист лотереи "Выиграй миллион" вытаскивает шары из чёрного ящика, в котором два белых и восемь чёрных шаров. Он может: вытащить один шар и выиграет, если тот окажется белым или, вытаскивая по одному, вытащить подряд два белых. Какой стратегии следует придерживаться, чтобы увеличить вероятность выигрыша?

2. При каких n и a разность между наибольшим и наименьшим положительными корнями уравнения

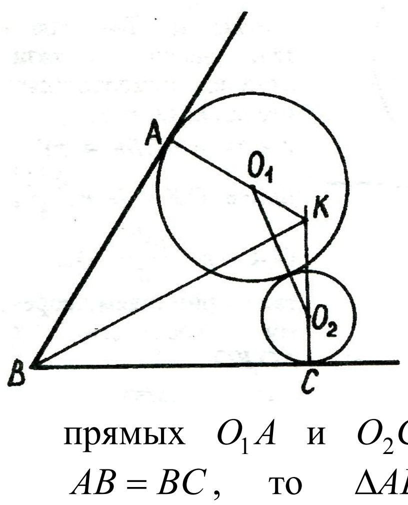
$$\underbrace{||\ldots}_{n}|x-1|-1|-\ldots-1|=a$$

равна *18,3?*

3. Длина стороны ромба $ABCD$ равна *4.* Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD, равно *3*. Найти радиусы окружностей.

4. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Условие задачи:



Угол ABC равен $60°$, причём $AB = BC = a$. Окружность O_1 касается AB в точке, A, а окружность O_2 касается BC в точке C кроме того, эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

Решение:

Так как окружности касаются сторон угла, то $O_1A \perp AB$ и $O_2C \perp BC$. $K-$точка пересечения прямых O_1A и O_2C. Легко установить, что $\angle AKC = 120°$. Поскольку $AB = BC$, то $\Delta ABK = \Delta CBK$ по гипотенузе и катету. Отсюда $\angle ABK = \angle CBK = 30°$. Тогда $AK = CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Пусть $O_2C = r$. По условию $O_1A = 2r$. Далее $O_1K = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - 2r$, $O_2K = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - r$. Применим к ΔO_1KO_2 теорему косинусов. Имеем

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)\cos 120^\circ .$$

Отсюда после необходимых преобразований получаем $r = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4} a$.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4} a$.

5. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

   Условие задачи:

   При каких значениях параметра a уравнение имеет решение?

   $$\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right) + 1 = 0.$$

   Решение:

   Обозначим $t = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$.

   Переформулируем условие задачи:

   При каких значениях параметра a уравнение $t^2 + 2at + 1 = 0$ имеет решение?

   Для того, чтобы квадратное уравнение имело корни необходимо и достаточно, чтобы $D > 0$.

   $D = a^2 - 1$

   $a^2 - 1 > 0$

   $a < -1 \vee a > 1$.

   Ответ: при $a < -1 \vee a > 1$.

6. Перечислите как можно больше типичных ошибок, которые допускают школьники при решении логарифмических уравнений и неравенств. Для каждой из указанных ошибок приведите пример неверного решения, приводящего к верному ответу.