ЗАДАНИЯ ОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных учреждений Республики Адыгея
2011 год

1. Решите систему

$$\begin{cases} 2x+2y=11, \\ \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}=5. \end{cases}$$

2. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Два плоских угла при вершине пирамиды равны α, а третий — β. Найдите объем пирамиды.

3. *Ответ и решение этого задания могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Решите уравнение $\log_2^2 tgx+\log_2 \sin^2 x\cdot\log_2 \cos^2 x=1.$

Решение. Запишем уравнение равносильное данному:

$$\log_2^2 tgx+4\log_2|\sin x|\cdot\log_2|\cos x|=1.$$

Если первое слагаемое в левой части полученного уравнения заменить выражением $(\log_2 \sin x-\log_2 \cos x)^2$, то мы сузим область определения исходного уравнения. Поэтому лучше ее расширить, сняв угрозу потери корня(из двух зол выбирают меньшее). Имеем:

$$(\log_2|\sin x|-\log_2|\cos x|)^2+4\log_2|\sin x|\cdot\log_2|\cos x|=1.$$

Надо четко понимать, что это уравнение является следствием исходного. Действительно, ведь первоначальное уравнение требует от $\sin x$ и $\cos x$ быть одного знака, а последнее уравнение это «смягчает» до ограничения $\sin x\cdot\cos x\neq 0$. Итак, запишем уравнение, равносильное исходному уравнению

$$\left(\log_2|\sin x| - \log_2|\cos x|\right)^2 = 1,$$

$$\log_2^2|\sin x \cdot \cos x| = 1,$$

$$|\sin 2x| = 4,$$

$$|\sin 2x| = 1,$$

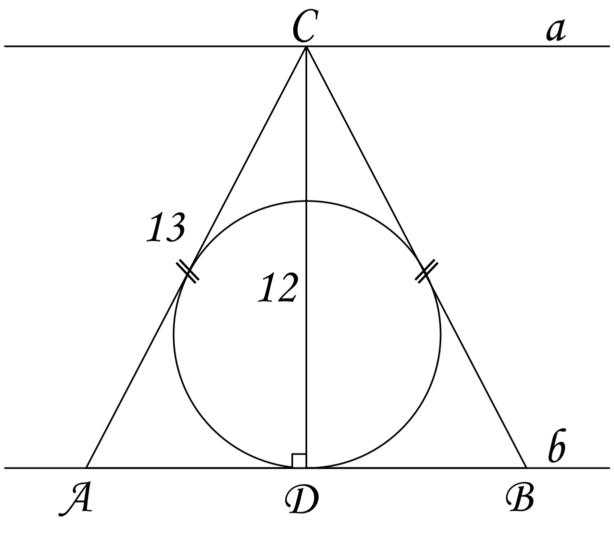
$$\cos 2x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

4. *Ответ и решение этого задания могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка *C*, а на другой — точки *A* и *B*, причем треугольник *ABC* — равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.



Дано:

$a \parallel b$

ΔABC — равнобедренный

$CD = 12 см$

$AC = 13 см$

Найти:

r — вписанной окружности ?

Решение.

Рассмотрим ΔACD — он прямоугольный, т.к. $CD \perp AB$. По т.Пифагора $AC^2 = AD^2 + CD^2$; $AD^2 = AC^2 - CD^2$;

$AD^2 = 169 - 144$; $AD = \sqrt{25} = 5$, значит $AB = 10см$.

$$r = \frac{2S}{a+b+c}; \quad r = \frac{2S}{13+13+10}; \quad r = \frac{2S}{36},$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} a \cdot h \quad S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} 10 \cdot 12; \quad S_{\Delta ACD} = 60 см^2$$

Тогда $r = \frac{2 \cdot 60}{36} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} см$.

Ответ: $r = 3\frac{1}{3} см$.

5. Найдите все значения k, при которых найдется такое b, что уравнение $$\left|x^2 - 1\right| + kx = \left|x^2 - 8x + 15\right| + b$$

а) имеет более пяти различных корней;

б) имеет ровно пять различных корней.