ЗАДАНИЯ ОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных учреждений Республики Адыгея

2013 год

1. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{3x} - 3\cdot 2^{2x} - 7\cdot 2^{x} + 21 > 0, \\ \sqrt{x}\left(2^{\frac{1}{x}} - \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \geq 0. \end{cases}$$

2. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, если $AB = BC = 2$, $AC = 1$, а ребро $CD = 4$ перпендикулярно ребрам AB и AC.

3. На школьной математической олимпиаде ученикам была предложена задача: «Петя выписал все делители числа $2^8\cdot 3^{10}$. Каждый два числа, имеющие общий делитель, больший 1, он соединил линией. Сколько линий нарисовал Петя?».

Приводим решения двух учеников. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

Решение Саши. Всего делителей у Петиного числа $9\cdot 11 = 99$ (двойка может входить в любой степени от 0 до 8, а тройка в любой степени от 0 до 10). Если их попарно соединить линиями, то всего линий получится $\dfrac{99\cdot 98}{2}$. Подсчитаем, какие из этих линий являются лишними. Лишние линии соединяют пары взаимно простых чисел. Такие пары образуют числа, в разложение которых не входит двойка, с числами, в разложение которых не входит тройка. То есть числа, являющиеся степенями двойки, с числами, являющимися степенями тройки. Степени двойки — это $1, 2, ..., 2^8$ — всего 9 штук, аналогично, степеней тройки — 11 штук. Всего линий будет $\frac{99 \cdot 98}{2} - 99 = 99 \cdot 48 = 4752$.

Решение Алены. Нарисуем круги Эйлера. В первый круг поместим все те из выписанных чисел, которые делятся на 2, а во второй — все числа, делящиеся на 3. Тогда всего в первом круге будет $8 \cdot 11 = 88$ чисел, во втором круге $9 \cdot 10 = 90$ чисел, а в пересечении этих кругов $8 \cdot 10 = 80$ чисел. Любые два числа в первом круге соединены линией — итого в нем $\frac{88 \cdot 87}{2}$ линий. И любые два числа во втором круге соединены линией — итого в нем $\frac{90 \cdot 89}{2}$ линий. Те линии, которые находятся в пересечении этих кругов, мы посчитали дважды. Линий, посчитанных дважды, будет $\frac{80 \cdot 79}{2}$. Поэтому всего линий будет $44 \cdot 87 + 45 \cdot 89 - 40 \cdot 79 = 4673$.

4. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

Условие задачи:

Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 4$, $AF = 2$, угол BAC равен 60°.

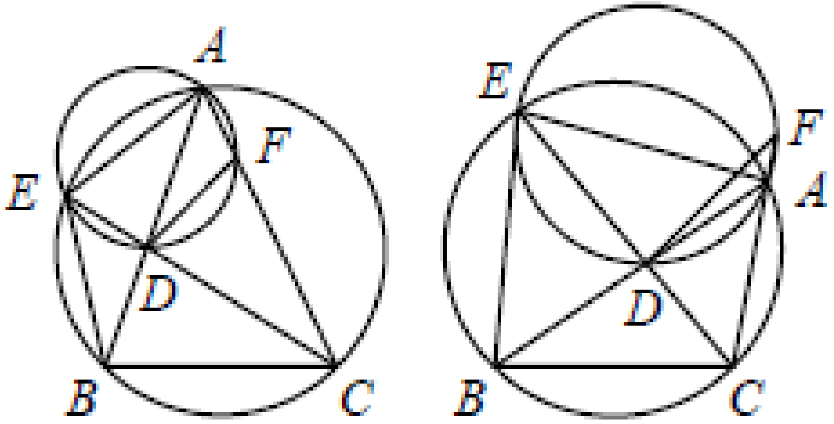

Рис. 1 Рис. 2

Решение.

Возможны два случая:

1) точка F лежит между A и C (рис.1);

2) точка A лежит между F и C (рис.2).

Рассмотрим первый случай:

$\angle DFC = 180^\circ - \angle AFD = \angle AED = \angle ABC$,

поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC = FC = AC - AF = 2$.

Тогда искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Рассмотрим второй случай:

$\angle AFD = \angle AED = \angle ABC$, поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC = FC = AC + AF = 6$.

Тогда искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $2\sqrt{3}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^{10} + \left(a - 2|x|\right)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех различных корней.