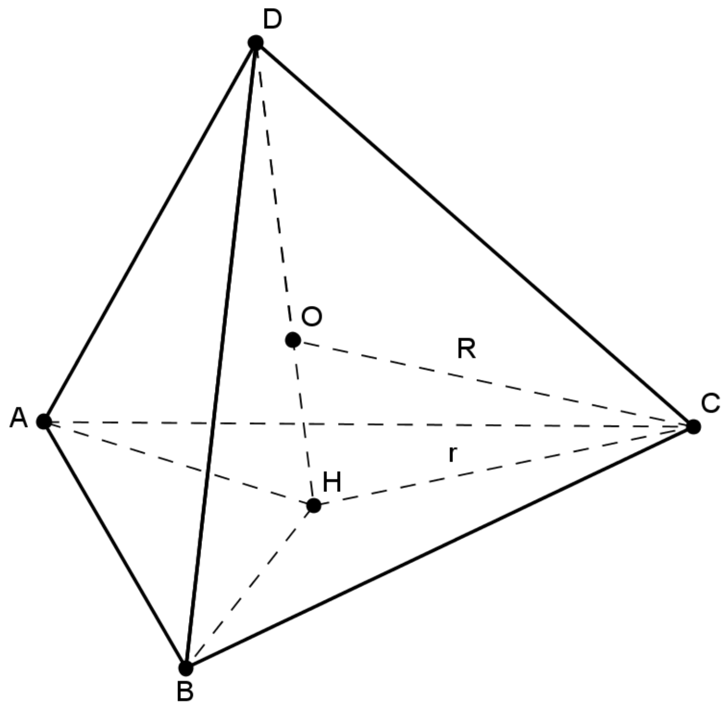
ЗАДАНИЯ ЗАОЧНОГО ЭТАПА

Творческого конкурса учителей и преподавателей математики образовательных организаций Республики Адыгея 2015 год

1. Является ли число $\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$ рациональным?
2. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{2x+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}} \geq x$.
3. Найдите все значения параметра α, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2+\frac{x+4}{\sqrt{3}}\sin 2\alpha-16=0$ на $\sqrt{\frac{2}{3}}$ больше, чем квадрат разности корней уравнения $x^2-x\sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{4}-1=0$.
4. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

   Условие задачи:
   Дана пирамида $DABC$ с ребрами $DC=AB=8, AC=BD=10, AD=BC=13$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.
   Решение:
   Пусть O – центр описанной сферы, тогда $AO=BO=CO=R$ – радиус сферы.
   Точки A, B, C лежат на сфере. Точки A, B, C лежат в одной плоскости.
   Любое сечение сферы плоскостью является окружностью.
   Значит, плоскость (ABC) пересекает сферу по окружности, описанной около ΔABC.



Опустим из точки O перпендикуляр на плоскость (ABC). Обозначим его $OH. OH \perp (ABC), H \in (ABC)$.
Наклонные $AO = BO = CO$, их проекции на плоскость (ABC) будут равны $AH = BH = CH \Rightarrow H$ – центр описанной около ΔABC окружности.
Обозначим $AH = BH = CH = r$.

$$S = \frac{abc}{4r}; r = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 13}{4 \cdot \frac{5\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 13}}{4}} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 13}{\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 13}}.$$

$$p = \frac{8 + 10 + 13}{2} = \frac{31}{2}.$$

$$S = \sqrt{\frac{31}{2} \cdot \left(\frac{31}{2} - 8\right)\left(\frac{31}{2} - 10\right)\left(\frac{31}{2} - 13\right)} = \sqrt{\frac{31}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{11}{2}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{31 \cdot 3 \cdot 11}}{4}.$$

ΔDHC: $DH^2 = 8^2 - r^2$;

$$OH = DH - R$$

ΔOHC: $OH^2 = R^2 - r^2$

$$(DH - R)^2 = R^2 - r^2$$

$$DH^2 - 2 \cdot DH \cdot R + R^2 = R^2 - r^2$$

$$8^2 - r^2 - 2 \cdot DH \cdot R = -r^2$$

$$DH = \frac{32}{R}.$$

ΔDHC: $DH^2 + HC^2 = DC^2$

$$\left(\frac{32}{R}\right)^2 + r^2 = 64$$

$$\frac{32^2}{R^2} = 64 - \frac{8^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2}{3 \cdot 11 \cdot 31}$$

$$\frac{32^2}{R^2} = 64\left(1 - \frac{4 \cdot 169}{3 \cdot 11 \cdot 13}\right)$$

$$\frac{32}{R^2} = 2 \cdot \frac{1023 - 676}{3 \cdot 11 \cdot 13}$$

$$R^2 = \frac{16 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13}{347}$$

$$R = \frac{4\sqrt{1023}}{\sqrt{347}}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{1023}}{\sqrt{347}}$.

5. *Текст, ответ и решение задачи могут содержать ошибки. Укажите эти ошибки (если они есть) и обоснуйте. Если приведено неверное решение, то приведите свое.*

   Условие задачи:
   Решите уравнение: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-2) = \operatorname{arcctg}(-2)$
   Решение:
   Так как $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arcctg}(-2)$, то $x = \operatorname{tg}(arctg\, x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arcctg}(-2)) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) + \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-2))}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-2))} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} =$ $0{,}75$.
   Ответ: $0{,}75$.
6. Многие планиметрические теоремы имеют аналоги в стереометрии.
   Приведите несколько примеров:
   а) планиметрических теорем и аналогичных им теорем стереометрии;
   б) верных планиметрических утверждений и их неверных стереометрических аналогов;
   в) верных стереометрических утверждений и их неверных планиметрических аналогов.