XX олимпиада младших школьников по математике

Республиканская естественно-математическая школа при АГУ

Майкоп, 6 апреля 2014 г.

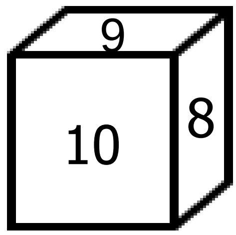
5 класс

ОТБОР

Задача 1. *Буратино хочет получить число 2014, используя только нечётные цифры, а также знаки арифметических операций. Цифры не обязательно различны. За каждую цифру и каждый знак арифметической операции он платит Карабасу–Барабасу по одной монете. У Буратино есть семь монет. Помогите ему.*

Решение: Например, 1999+15, 1997+17 и др.

Задача 2. *На гранях кубика записаны шесть различных положительных целых чисел. На передней грани написано число 10, на верхней — число 9, на правой — число 8 (см. рисунок). Какие числа написаны на левой, нижней и задней гранях, если известно, что суммы чисел, написанных на противоположных гранях, равны, а число 8 делится на число, написанное на левой грани. Объясните, как был найден ответ.*

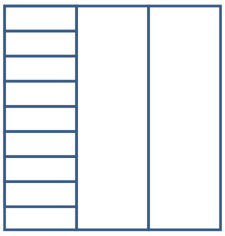


Ответ. На левой грани написано число 4, на задней — 2, на нижней — 3. ***Решение.*** Так как на левой грани написан делитель числа 8, там либо 4, либо 2, либо 1. Но сумма чисел, написанных на противоположных гранях, должна быть больше 10. Поэтому на левой грани написано число 4, и сумма чисел на противоположных гранях равна 12. Значит, на задней грани написано число 12–10 = 2, а на нижней — число 12–9 = 3

Задача 3. *В замке собрались 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. 99 из собравшихся произнесли такую фразу: «99 из нас — лжецы». Сколько лжецов могло быть в замке? Укажите все возможности и постарайтесь объяснить, почему других возможностей нет.*

Ответ. 100. ***Решение.*** Если за столом было больше одного рыцаря, то один из рыцарей обязательно высказался, и сказал он неправду, потому что лжецов за столом было меньше 99. Противоречие. Если за столом был ровно один рыцарь, то по крайней мере 98 лжецов сказали правду — снова противоречие. Если же все за столом были лжецами, то 99 из них, как им и положено, солгали, и противоречия не возникает. ***Примечание.*** Вот возможное неверное решение: «Пусть среди собравшихся есть рыцарь. Тогда он сказал правду, и за столом 99 лжецов. Но тогда и лжецы сказали правду — противоречие.» Дело в том, что если рыцарь за столом только один, он может оказаться как раз тем единственным, кто не высказался вообще.

Задача 4. *Как без остатка разрезать квадрат на 11 прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон втрое длиннее другой? Пример рисуйте по клеточкам!*

Ответ: 

Задача 5. В 1001 году на багдадском базаре ковёр-самолёт стоил 1 динар. Затем в течение 99 лет он каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год подорожал в 2 раза. В каком году произошло подорожание в 2 раза, если в 1100 году такой же ковёр-самолёт стоил 152 динара? Ответ объясните.

Ответ. В 1054 году. ***Решение.*** Если бы ковёр-самолёт каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год не дорожал бы совсем, то в 1100 году он стоил бы 1+98 = 99 динаров. Значит, в результате подорожания вдвое к стоимости ковра добавились 152–99 = 53 динара. Но в результате подорожания вдвое к стоимости ковра добавляется она же, то есть в год перед подорожанием ковёр стоил 53 динара. Значит, год перед подорожанием был 1053-й, а год подорожания — 1054-й.

Задача 6. *Братец Иванушка и сестрица Алёнушка вместе вышли из подъезда и направились к разным киоскам с мороженым. Каждый из них, дойдя до своего киоска, купил по3 порции мороженого и, тут же начав его есть, повернул обратно. Когда Алёнушка подошла к подъезду, Иванушка уже стоял там и как раз доел своё третье мороженое, а Аленушка съела 2 порции из трёх. Какой киоск дальше от подъезда и во сколько раз, если скорости движения детей одинаковы, порции мороженого и скорости съедания мороженого также одинаковы?*

Решение. Аленушка на обратном пути съела ровно две порции мороженого, значит, время съедания одной порции равно времени, за которое она прошла половину пути от киоска до подъезда. Так как Иванушка успел съесть на одну порцию больше, то Алёнушка начала есть своё первое мороженое(т.е. была у «своего» киоска) в тот момент, когда Иванушка начал есть своё второе. Значит, в тот момент, когда Иванушка начал есть своё первое мороженое(т.е. был у «своего» киоска), Алёнушке оставалось пройти ровно половину пути до «своего». Так как дети движутся с одинаковыми скоростями, то путь до киоска, в который ходила Аленушка, в два раза длиннее.

XX олимпиада младших школьников по математике

Республиканская естественно-математическая школа при АГУ

Майкоп, 6 апреля 2014 г.

6 класс

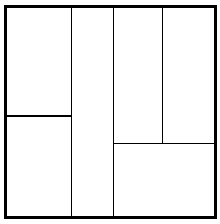
ОТБОР

Задача 1. *Приведите какое-нибудь одно решение числового ребуса ДО + РЕ + МИ + ФА = 128 (различными буквами зашифрованы различные ненулевые цифры)*

Ответ. $15+26+38+49=128$. **Замечание.** Ответ является единственным с точностью до перестановок у слагаемых цифр в разрядах единиц или цифр в разрядах десятков.

Задача 2. *Петя, Коля и Вася стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Когда Петя пробежал половину дистанции, Коля и Вася в сумме пробежали 85 метров. Известно, что скорость каждого постоянна на протяжении всей дистанции. Сколько метров в сумме оставалось пробежать до финиша Коле и Васе, когда Петя пришёл к финишу?*

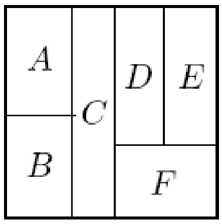
Ответ. 30 м. **Решение.** Когда Петя добежит до финиша, Коля и Вася в сумме пробегут $2\cdot 85=170$ м из $100+100=200$ м, которые они вместе должны пробежать. Значит, им останется пробежать $200-170=30$ м.



Задача 3. *Квадрат разрезан на прямоугольники так, как показано на рисунке. Оказалось, что площади всех прямоугольников равны. Найдите отношение длин сторон правого нижнего прямоугольника.*

Ответ. $3:2$.

Площадь каждого прямоугольника в 6 раз меньше площади квадрата. Площадь прямоугольника Q, составленного из прямоугольников D, E и F (см. рис. 2), равна половине площади квадрата; значит, горизонтальная сторона прямоугольника F равна половине стороны квадрата. Площадь прямоугольника F составляет треть от площади Q; значит, вертикальная сторона F равна трети стороны квадрата. Поэтому его стороны относятся как $3:2$.



Задача 4. *Вдоль прямой дороги живут пятеро друзей: Алик, Боря, Вася, Гриша и Дима, дома которых стоят в алфавитном порядке. Боря подсчитал сумму расстояний от своего дома до домов четырех своих друзей и получил 20 км. Вася же вычислил, что сумма расстояний от его дома до домов его четырех друзей равна 18 км. На каком расстоянии от Бори живет Вася? Ответ обоснуйте.*

Задача 5. *В зале 2013 человек; каждый из них – либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжёт). Каждого из них спросили: «Кого в зале больше: лжецов или рыцарей?». Каких ответов – «Лжецов» или «Рыцарей» – было больше и почему?*

Ответ. «Рыцарей».

Общее количество человек в зале нечётно, поэтому либо рыцарей, либо лжецов в зале большинство.

Пусть в зале больше рыцарей. Тогда каждый из них дал ответ «Рыцарей», и с учётом того, что их больше, получается, что больше будет ответов «Рыцарей». Если же в зале больше лжецов, то теперь уже они будут говорить, что рыцарей больше, и, значит, вновь будет больше ответов «Рыцарей».

Задача 6. *Трое учеников написали одинаковый тест. За правильно решённую задачу ученику ставилось 2 балла, за неправильно решённую – снимался 1 балл, а если ответ на задачу не записан, то ставилось 0 баллов. Вместе ученики набрали 100 баллов. Докажите, что кто-то из них при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.*

Решение. Предположим, что все три ученика писали ответы ко всем задачам. Тогда, если какую-то задачу они все трое решили правильно, то они получат за неё вместе $2\cdot 3=6$ баллов. Если какую-то задачу двое из них решили правильно, а один нет, то они получат за неё вместе $2+2-1=3$ балла. Если какую-то задачу один решил правильно, а двое нет, то они получат за неё вместе $2-1-1=0$ баллов. Наконец, если какую-то задачу они все трое решили неправильно, то с них суммарно снимут $1\cdot 3=3$ балла.

Изначально у них было суммарно 0 баллов. После решения каждой задачи сумма баллов либо не изменялась, либо изменялась на число, делящееся на 3. Поэтому, если бы все ученики писали ответы ко всем задачам, то в конце общая сумма баллов у них делилась бы на 3. Но 100 на 3 не делится. Поэтому кто-то из учеников при выполнении теста записал ответы не ко всем задачам.

XX олимпиада младших школьников по математике

Республиканская естественно-математическая школа при АГУ

Майкоп, 6 апреля 2014 г.

7 класс

ОТБОР

Задача 1. *На двух карточках написано одно и то же семизначное число* N*, оканчивающееся на* 9876*. Одну карточку разрезали на две, проведя разрез между третьей и четвёртой цифрами, а другую – проведя разрез между четвёртой и пятой цифрами. Приведите пример какого-нибудь числа* N *такого, чтобы сумма чисел на половинках первой карточки была равна сумме чисел на половинках второй карточки.*

Ответ. Единственный вариант – это число 9999876.

Ответом является решение ребуса $ABC + 9876 = ABC9 + 876$ (разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры). Вычитая из обеих частей по 876, получаем $ABC + 9000 = ABC0 + 9$. Отсюда $9 \cdot ABC = 9000 - 9$, то есть $ABC = 1000 - 1 = 999$. В этом случае получаем $9999 + 876 = 999 + 9876 = 10875$.

Задача 2. *Маша каждый день берёт в школу и съедает на переменах либо 6 слив, либо 2 яблока и банан. В пятницу, когда она съела на перемене часть принесённых фруктов (но не все), оказалось, что с начала недели она уже съела на переменах 21 фрукт. Сколько и каких фруктов осталось у неё в портфеле? Объясните свой ответ.*

Ответ. Три сливы.

Общее количество фруктов, съедаемых Машей на переменах за один день, делится на 3. Поскольку она съела 21 фрукт – число, делящееся на 3, то либо у нее не осталось в портфеле фруктов (что противоречит условию), либо осталось три фрукта. Ими могли быть только сливы, так как в противном случае в портфеле оставались бы 2 яблока и банан, то есть в этот день она бы ещё не ела фруктов.

Задача 3. *В семи маленьких банках меньше краски, чем в четырёх больших. Петя купил 6 больших банок краски, а Вася — 10 маленьких. Кто из них купил больше краски? Ответ объясните.*

Ответ. Больше краски купил Петя. ***Решение.*** Возьмем 4 Петиных и 7 Васиных банок. По условию в Петиных банках краски больше. Остались 2 Петиных и 3 Васиных банки. Поскольку в 4 больших банках больше краски, чем в 6 маленьких, в 2 больших банках больше краски, чем в 3 маленьких, так что в оставшихся Петиных банках также больше краски, чем в оставшихся Васиных.

ФИНАЛ

Задача 4. *Два маляра Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4. Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор, пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2. Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?*

Ответ: Коля. ***Решение***. Обозначим клетки доски буквами как показано на рисунке. Стратегия Коли будет заключаться вследующем. После хода Васи (например, в клетку, обозначенную буквой А) Коля делает ход вклетку, обозначенную той же буквой.

Коля выиграет, т.к. если он своим ходом закрасит какой-нибудь квадрат 2×2, то это будет означать, что Вася предыдущим ходом закрасил какой-нибудь квадрат 2×2

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

Примечание:

1) Если приводился только ответ и/или частный случай ходов Васи и Коли, то за это баллы недавались

2) Если приводился верный алгоритм ходов Коли без доказательства того, что он работает– 5 баллов

Задача 5. *В комнате лежал небольшой мешок с яблоками. Среди 10 человек часть – рыцари (они всегда говорят правду), а остальные – лжецы (они всегда лгут). Первый из этих 10 человек зашёл в комнату, заглянул в мешок и сказал: «В мешке больше 1 яблока»; после этого он взял одно яблоко из мешка и вышел из комнаты. Потом зашел второй, и, заглянув в мешок, сказал, что в нём больше двух яблок. Затем он взял яблоко из мешка и вышел. Так же и остальные по очереди заходили, говорили, что в мешке осталось больше 3, 4, …, 10 яблок, брали по яблоку и выходили из комнаты. Какое наибольшее число лжецов может быть среди этих 10 человек?*

Ответ. 5.

Так как 10 человек взяли по яблоку из мешка, то в мешке изначально было не меньше 10 яблок. После того, как первые 4 человека взяли по яблоку из мешка, в мешке осталось не менее 6 яблок. Значит, пятый вошедший (сказавший, что в мешке больше 5 яблок) сказал правду. Аналогично, сказали правду первые четверо. Это означает, что рыцарей не меньше 5, а лжецов не больше $10-5=5$.

С другой стороны, 5 лжецов среди этих 10 человек быть могло, если, например, в мешке изначально лежало 10 (или 11) яблок. Тогда первые пять человек скажут правду, а все, начиная с шестого (перед его приходом в мешке будет только 5 или 6 яблок), солгут.

Задача 6. *Загаданы четыре различных натуральных числа. Математик знает про это. Вначале ему назвали сумму двух самых маленьких чисел, и он не смог угадать эти два числа. Но, когда ему сказали, что сумма всех четырёх чисел равна 15, он сумел назвать все четыре числа. Чему равны эти числа? Объясните, как рассуждал математик.*

Ответ. 2, 3, 4, 6.

Вначале математику не могли назвать сумму, меньшую, чем 5, так как при названных суммах 3 или 4 он бы сразу сказал, что это суммы $1+2$ или $1+3$. Третье из загаданных чисел по крайней мере на 2 больше, чем первое (между ними ещё есть второе число). Аналогично, четвёртое по крайней мере на 2 больше второго. Значит, если бы вначале математику назвали сумму, не меньшую 6, то сумма третьего и четвёртого чисел была бы не меньше, чем $6+2+2=10$, а сумма всех чисел – не меньше, чем $6+10=16$, что не так.

Итак, сумма первых двух чисел равна 5, а сумма третьего и четвёртого равна $15-5=10$. Эта сумма не могла быть набрана как $1+9$ или $2+8$ (так как третье число не меньше 3). Также эта сумма не могла быть набрана как $3+7$, так как если бы третье число было равно 3, то сумма первых двух равнялась бы $1+2=3$. Значит, третье и четвёртое числа – это 4 и 6. Тогда для первого и второго остаётся единственный вариант с суммой 5, а именно 2 и 3.